

Maße auf lokalbeschränkten Räumen

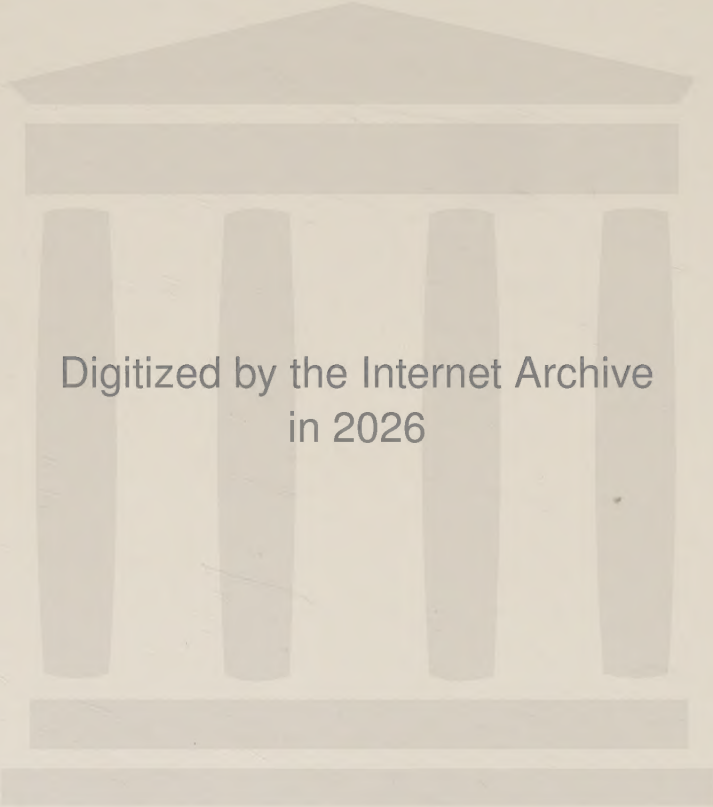
von

Dieter Sondermann

aus

Duisburg

1968 № 207



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546208_0079

Maße auf lokalbeschränkten Räumen

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Dieter Sondermann

aus

Duisburg

ERLANGEN

1968

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 22. Mai 1968

Dekan: Prof. Dr. W. Haupt

Erstberichterstatter: Prof. Dr. H. Bauer

Zweitberichterstatter: Prof. Dr. G. Nöbeling

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	<u>Seite</u>
§ 0 Vorbemerkungen	3
0.1 Einleitung	3
0.2 Bezeichnungen	8
0.3 Symbolliste	9
§ 1 Maße auf lokalbeschränkten Räumen	10
1.1 Lokalbeschränkte Räume	10
1.2 Definition eines Maßes	12
1.3 Verschiedene Topologien auf dem Raum der Maße	15
1.4 Klassifizierung der Maße nach Stetigkeits- eigenschaften	17
1.5 Trägerfilter und Träger von Maßen	20
1.6 Maße mit endlichem Träger	23
§ 2 Fortsetzung eines Maßes. $\mathcal{L}^p$ -Räume	27
2.1 Fortsetzung eines Maßes auf die integrier- baren Funktionen	27
2.2 Integrierbare und meßbare Mengen	33
2.3 Äußeres und inneres Maß. N_p -Normen	42
2.4 Die $\mathcal{L}^p$ -Räume ($1 \leq p < \infty$)	45
2.5 Konvergenzsätze	50
2.6 Integration vektorwertiger Funktionen	51
§ 3 Beziehungen zu den "klassischen" Integrations- theorien	56
3.1 Das Riemann-Integral für unstetige Maße	56
3.2 Das Daniell-Integral für σ -stetige Maße	58
3.3 Das Bourbaki-Integral für τ -stetige Maße	60
3.4 Eingliederung der abstrakten Theorie des Rie- mann-Integrals nach Loomis	63
3.5 Eingliederung der abstrakten Integrationstheo- rie nach Stone	66

§ 4	Charakterisierung der Stetigkeitseigenschaften der Maße auf einem lokalbeschränkten Raum	70
4.1	Die $\mathcal{B}$ -Kompaktifizierung eines lokalbeschränkten Raumes	70
4.2	Charakterisierung der Stetigkeit von Maßen mit Hilfe des Darstellungssatzes	72 a
§ 5	Struktur eines lokalbeschränkten Raumes und Stetigkeit seiner Maße	77
5.1	Verschiedene Kompaktheitsbegriffe in lokalbeschränkten Räumen	77
5.2	Einige Struktursätze	80
5.3	Maße mit pseudokompaktem Trägerfilter	82
5.4	Charakterisierung der $\mathcal{B}$ -reellkompakten Räume	85
5.5	Folgerungen bzgl. der Existenz meßbarer Kardinalzahlen	89
	Literaturverzeichnis	91

0.1 Einleitung

Neben die Theorie der Radonmaße auf lokalkompakten Räumen von BOURBAKI [7] sind in den letzten Jahren eine Reihe von weiteren Maßtheorien auf topologischen Räumen getreten. Wir denken hierbei insbesondere an die Arbeiten von VARADARAJAN [35], GOULD-MAHOWALD [15a], SCHWARTZ [31] und KRICKEBERG [23]. Obwohl jeweils von unterschiedlichen Voraussetzungen ausgehend, ist allen diesen Theorien gemeinsam, daß sie Maße auf vollständig regulären topologischen Räumen statt auf lokalkompakten betrachten. Gemeinsam ist aber allen diesen Theorien auch, daß sie nur spezielle Maße zulassen und daß man für den Spezialfall eines lokalkompakten Raumes nicht die volle Theorie der Radonmaße zurückerhält. Den allgemeinsten Standpunkt nimmt VARADARAJAN ein - doch auch von ihm werden nur beschränkte Maße behandelt. Die Hauptziele dieser Arbeit sind deshalb:

- (1^o) Erweiterung der Theorie der Radonmaße von BOURBAKI auf vollständig reguläre Räume;
- (2^o) Erweiterung der Maßtheorie von VARADARAJAN auf nicht beschränkte Maße.

Interessanterweise haben beide Probleme eine gemeinsame Lösung.

Das Problem (1^o) wird unter dem Gesichtspunkt behandelt, einen möglichst großen Teil der reichen Struktur, die für die Theorie der Radonmaße auf einem lokalkompakten Raum zur Verfügung steht, auf vollständig reguläre Räume zu übertragen. Die Struktureigenschaften der Radonmaße hängen aber eng mit der Struktur des Ringes $\mathcal{K}$ aller stetigen reellen Funktionen mit kompaktem Träger zusammen. Um auf einem vollständig regulären Raum X einen Ring von stetigen Funktionen mit ähnlichen Struktureigenschaften, wie sie der Ring $\mathcal{K}$ auf einem lokalkompakten Raum besitzt, zu definieren, muß man auf X ein

System von Teilmengen auszeichnen, das die Rolle der kompakten Mengen in den lokalkompakten Räumen übernimmt. Dies leistet der von GOULD [15] eingeführte Begriff des "bounding system". Anstelle der u.U. recht einschränkenden Voraussetzung - man denke etwa an topologische Vektorräume, daß jeder Punkt von X eine kompakte Umgebung besitzt, tritt dabei die schwächere Forderung nach der Existenz einer "beschränkten" Umgebung für jeden Punkt von X . M.a.W.: man ersetzt die lokale Kompaktheit durch lokale Beschränktheit. Das Beschränkungssystem $\mathcal{B}$ kann dabei je nach Problemstellung verschieden gewählt werden. Der Ring $\mathcal{K}(X, \mathcal{B})$ aller stetigen, reellen und beschränkten Funktionen mit beschränktem Träger läßt sich dann mit den gleichen Strukturen versehen wie der Ring $\mathcal{K}$ auf einem lokalkompakten Raum. Definiert man ein Maß auf dem lokalbeschränkten Raum $(X, \mathcal{B})$ als stetige Linearform auf $\mathcal{K}(X, \mathcal{B})$, so ist klar, daß dann auch der Raum der Maße auf $(X, \mathcal{B})$ als Dual von $\mathcal{K}(X, \mathcal{B})$ analoge Strukturen besitzt wie der Raum der Radonmaße auf einem lokalkompakten Raum.

Das Problem (2°) führt auf ähnliche Überlegungen. Ausgangspunkt bei VARADARAJAN ist eine positive und endlich-additive Mengenfunktion auf der von den z -Mengen eines topologischen Raumes X erzeugten Algebra $\mathcal{F}$. Auch hier legt der Versuch, nicht beschränkte Maße auf X sinnvoll zu definieren, die Einführung eines Beschränkungssystems $\mathcal{B}$ auf X nahe. Anstelle der Algebra $\mathcal{F}$ tritt dann der von den beschränkten z -Mengen erzeugte Ring $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$. Analog können dann die Baireschen bzw. Borelschen Mengen von $(X, \mathcal{B})$ definiert werden als der von den beschränkten z -Mengen bzw. abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen erzeugte σ -Ring. Dies entspricht im Falle eines lokalkompakten Raumes X mit den kompakten Mengen als Beschränkungssystem

dem Standpunkt von HALMOS [16]. Da sich die verallgemeinerten Maße auf dem Ring $\mathcal{f}_B$ und die stetigen Linearformen auf $\mathcal{K}(X, B)$ eineindeutig entsprechen, führen die Probleme (1^o) und (2^o) in der Tat auf das gleiche Konzept von Maßen auf lokalbeschränkten Räumen.

Die Maße auf einem lokalbeschränkten Raum (X, B) unterscheiden sich jedoch in einem wesentlichen Punkt von den Radonmaßen. Während diese stets straff sind, können die Maße auf (X, B) rein-unstetig sein. Es ist daher eine Klassifizierung der Maße nach ihren Stetigkeitseigenschaften, wie sie von LE CAM [24] eingeführt worden ist, erforderlich. Die weiteren Aufgaben dieser Arbeit bestehen somit in:

- (3^o) Charakterisierung der Stetigkeitseigenschaften der Maße auf (X, B) mit Hilfe der B -Kompaktifizierung;
- (4^o) Untersuchung der Zusammenhänge zwischen der Struktur eines lokalbeschränkten Raumes und der Stetigkeit seiner Maße.

Die Arbeit gliedert sich in fünf Paragraphen. § 1 ist den grundlegenden Eigenschaften eines lokalbeschränkten Raumes sowie des Raumes seiner Maße gewidmet. In § 2 wird das Maß μ auf die Menge der μ -integrierbaren Funktionen fortgesetzt und der zugehörige Maßraum $(X, \mathcal{L}_\mu, \mu)$ abgeleitet. Die verwendete Fortsetzungsmethode ist rein funktionalanalytisch und unabhängig von dem speziellen Stetigkeitscharakter von μ . Anschaulich gesprochen bedeutet dies, daß eine gemeinsame Konstruktion des Riemann- und des Lebesgue-Integrals angegeben wird. In den Abschnitten 2.3 und 2.4 wird dann die Beziehung zu den Fortsetzungsmethoden von DANIELL/STONE und BOURBAKI mittels des Oberintegrals μ^* hergestellt. Es zeigt sich, daß beide Methoden äquivalent sind. Das eigentlich

überraschende Ergebnis ist jedoch, daß die gleiche Fortsetzungsmethode auch für das Riemann-Integral durchführbar ist.

In § 3 werden die erhaltenen Ergebnisse mit denjenigen der Integrationstheorien von LOOMIS [25] , DANIELL/STONE [10], [33] und BOURBAKI [7] verglichen. Es zeigt sich, daß der in § 2 entwickelte Integralbegriff je nach Stetigkeitseigenschaft des zugrunde liegenden Maßes entweder dem Riemann-Integral nach LOOMIS oder dem ersten bzw. zweiten STONESchen Integral oder, falls der Raum lokalkompakt ist, dem BOURBAKISchen Integral entspricht. Die in § 2 entwickelte Fortsetzungsmethode faßt demnach die genannten Integrationstheorien zusammen. Ferner wird gezeigt, daß sich die abstrakten Integrationstheorien von LOOMIS und STONE stets auf den konkreten Fall eines Maßes auf einem lokalbeschränkten Raum zurückführen lassen. Im Gegensatz zu der Rückführung auf die Theorie der Radonmaße mittels Kompaktifizierung durch BAUER [3] , [4] , wird hierbei der ursprüngliche Maßraum beibehalten, und es stimmen nicht nur die Äquivalenzklassen $L^p_{\mathbb{F}}$, sondern auch die Räume $\mathcal{L}^p_{\mathbb{F}}$ der p-fach integrierbaren Funktionen in der abstrakten und in der konkreten Theorie überein.

§ 4 bringt eine Charakterisierung der Stetigkeitseigenschaften der Maße auf $(X, \mathbb{B})$ mittels der $\mathbb{B}$ -Kompaktifizierung $X'_{\mathbb{B}}$. § 5 untersucht die Zusammenhänge zwischen der Struktur eines lokalbeschränkten Raumes und der Stetigkeit seiner Maße. In 5.4 werden insbesondere eine maßtheoretische Kennzeichnung der reellkompakten Räume oder Q-Räume von HEWITT [18] gegeben und damit die - leider falschen - Charakterisierungssätze von GO-DIN HU [14] und KNOWLES [20] richtiggestellt. Aus diesem Charakterisierungssatz folgen einige Resultate, die auch für Radonmaße auf lokalkompakten Räumen neu sind. Außerdem wirft

dieser Satz neues Licht auf das "allgemeine Problem der Maßtheorie" - nämlich auf die Frage nach der Existenz messbarer Kardinalzahlen.

Grundlegend für diese Untersuchungen sind die beiden Arbeiten von H. BAUER [3], [4], die die Beziehungen zwischen den abstrakten Integrationstheorien von LOOMIS und STONE und der Theorie der Radonmaße herstellen. Viele Ergebnisse und Methoden sind hieraus übernommen worden. Weitere Anregungen enthielt die Arbeit von GOULD [15]. Schließlich ist die Arbeit in Gesprächen mit meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor H. BAUER, entscheidend gefördert worden. Hierfür möchte ich ihm meinen besonderen Dank sagen.

PS.: Nach Fertigstellung der Arbeit erschien ein Artikel von CHOQUET: "Cardinaux 2-mesurables et cônes faiblement complets", Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 17, 1 (1967), 383-393, der verschiedene Resultate des Paragraphen 5 dieser Arbeit in Spezialfällen enthält. Das Hauptergebnis der CHOQUETSchen Arbeit ist die folgende Charakterisierung der reellkompakten Räume innerhalb der Klasse der lokalkompakten und (im Sinne dieser Arbeit) beschränkten Räume: "Ein lokalkompakter Raum X ist genau dann reellkompakt, wenn der Kegel $\mathcal{M}_K^+(X)$ der positiven Radonmaße auf X mit kompaktem Träger schwach vollständig ist bzgl. der Dualität $\langle \mathcal{M}_K^+(X), \mathcal{C}(X) \rangle$. Dieses Ergebnis ist ein Spezialfall des Theorems 9 dieser Arbeit. Nach BOURBAKI [7], chap. 4, § 4, No. 8, ist nämlich $\mathcal{M}_K^+(X)$ mit dem Kegel $\mathcal{C}_+^*(X)$ identisch. $\mathcal{M}_K^+$ liegt außerdem schwach dicht in dem Kegel $\mathcal{C}_+^*(X)$ (nach Theorem 2 in 1.6 liegt bereits die Teilmenge $\mathcal{E}_+(X)$ von $\mathcal{M}_K^+$ dicht in dem vollständigen

Kegel $\mathcal{C}_+^*$). Somit folgt die CHOQUETSche Charakterisierung unmittelbar aus Satz 5.6 (iii). Als Anwendung dieser Charakterisierung bringt CHOQUET ebenfalls den Satz 5.8 sowie Charakterisierungen der nicht-zweiwertig-meßbaren Kardinalzahlen, die ebenfalls durch Spezialisierung des Satzes 5.6 auf diskrete Räume erhalten werden können. Ferner enthält die CHOQUETSche Arbeit die Äquivalenz der Aussagen (ii) und (iii) des Theorems 8 in 5.3 für den Spezialfall eines beschränkten Raumes.

Herrn Professor M. BRELOT danke ich dafür, daß er mich auf die CHOQUETSche Arbeit aufmerksam gemacht hat, sowie für die Zusage eines Vorabdrucks.

0.2 Bezeichnungen

Für jeden topologischen Raum X bezeichnet $\mathcal{C}(X)$ den Ring der stetigen reellen Funktionen auf X und $\mathcal{C}_b(X)$ den Teilring der beschränkten Funktionen. Ist Y ein Unterraum von X , so bezeichnet $g|_Y \in \mathcal{C}(Y)$ die Restriktion von $g \in \mathcal{C}(X)$ auf Y . Für jeden Vektorverband $\mathcal{R}$ (bzgl. der üblichen Ordnung " $\leq$ ") von reellen Funktionen auf X bezeichnet $f \vee g$ das (punktweise) Supremum von $f, g \in \mathcal{R}$. Analog $f \wedge g$ das Infimum. $f^+ = f \vee 0$ bzw. $f^- = -f \vee 0$ seien die Positiv- bzw. Negativteile der Funktion $f \in \mathcal{R}$. Für jedes $f \in \mathcal{R}$ sei ferner:

$$[f \leq \alpha] := \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$$

$$Z(f) := [f = 0]$$

$$E(f) := [f = 1]$$

$$P(f) := [f > 0]$$

$\mathcal{Z}(\mathcal{R})$ bezeichne das System $\{Z(f) : f \in \mathcal{R}\}$. Analog $\mathcal{E}(\mathcal{R})$ sowie $\mathcal{P}(\mathcal{R})$.

Die Dualräume von $\mathcal{R}$ werden wie folgt bezeichnet:

$\mathcal{R}'$ topologisches Dual;

$\mathcal{R}^*$ algebraisches Dual;

$\mathcal{R}^0$ ordnungstheoretisches Dual.

Ein System $\mathcal{F} = (S_\alpha)_{\alpha \in A}$ von Elementen einer durch " $<$ " geordneten Menge X heißt aufsteigend filtrierend (kurz: aufst. filtr.), wenn für alle $S_\alpha, S_\beta \in \mathcal{F}$ ein $S_\gamma \in \mathcal{F}$ existiert mit $S_\alpha < S_\gamma$ und $S_\beta < S_\gamma$. $\mathcal{F}$ heißt absteigend filtrierend (kurz: abst. filtr.), wenn $\mathcal{F}$ bzgl. der zu " $<$ " inversen Ordnung aufstr. filtr. ist. Ist $\mathcal{F}$ speziell ein System von Teilmengen von X , so bedeutet die Schreibweise $S_\alpha \searrow \emptyset$, daß $\mathcal{F}$ bzgl. " $\subset$ " abst. filtr. ist und gilt $\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha = \emptyset$.

Die charakteristische Funktion der Menge A wird mit 1_A bezeichnet.

0.3 Symbolliste

(Es wird jeweils auf die Seite verwiesen, auf der das betreffende Symbol eingeführt wird.)

$A_{\mathbb{B}}$	35	$M_{\mathbb{B}}, M(X, \mathbb{B})$	13
$\mathbb{B}$	10	$M_b, M_b(X, \mathbb{B})$	14
$\mathbb{B}_0$	13	$M_X, M_X(X, \mathbb{B})$	15
$\mathcal{L}$	39	M^σ, M^τ, M^t	19
$\mathcal{L}_0$	39	$M_0, M_0(X, \mathbb{B})$	83
$E, E(X)$	23	μ^*, μ_*	42
$E_0, E_0(X)$	23	N_P, N_P^M	44, 51
$\mathcal{F}_\mu$	30	$\mathbb{R}_0$	64
$\mathcal{F}^P(\mu)$	45	δ_μ	33
$\mathcal{F}_F^P(\mu)$	51	$\Sigma_{\mathbb{B}}, \Sigma_B$	19
$K_{\mathbb{B}}, K(X, \mathbb{B})$	12	T_f	12
$K(X, Y)$	13	T_μ	21
$K_{\mathbb{B}}^0$	13	$\mathcal{T}_Y^u$	13
$K_F, K_F(X, \mathbb{B})$	51	$\mathcal{T}_{\mathbb{B}}^u$	13
$\tilde{K}_{\mathbb{B}}, \tilde{K}(X, \mathbb{B})$	77	$\mathcal{T}_B^c$	18
$\tilde{K}^0$	85	$\mathcal{T}_{\mathbb{B}}^c$	18
$\tilde{K}'$	85	$\mathcal{U}^M$	29
$\mathcal{L}^1(\mu)$	32	$(X, \mathbb{B})$	10
$\mathcal{L}^P(\mu)$	45	$\mathcal{Z}_{\mathbb{B}}$	35
$L^P(\mu)$	45		
$\mathcal{L}_F^P(\mu)$	51		

§ 1. Maße auf lokalbeschränkten Räumen

1.1 Lokalbeschränkte Räume

Die Forderung, daß jeder Punkt eines topologischen Raumes eine kompakte Umgebung besitze - m.a.W. daß der Raum lokal-kompakt sei - ist u.U. recht weitgehend. Für einen separierten topologischen Vektorraum z.B. bedeutet diese Forderung bekanntlich, daß der Raum endlich-dimensional ist.

Man kann jedoch die Voraussetzung der Lokalkompaktheit abschwächen, ohne die wesentlichen Strukturen eines lokalkompakten Raumes zu verlieren, indem man für jeden Punkt nur die Existenz einer beschränkten Umgebung fordert. Dies ist der Sinn der folgenden Definitionen, die auf GOULD [15] zurückgehen.

Definition 1.1: $(X, \mathcal{B})$ heißt ein lokalbeschränkter Raum, wenn gilt:

1. X ist ein vollständig regulärer topologischer Raum;
2. $\mathcal{B}$ ist eine Familie von Teilmengen B von X mit folgenden Eigenschaften:

(B1) $\mathcal{B}$ ist aufsteigend filtrierend

(B2) $\mathcal{B}$ überdeckt X (d.h. $X \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$)

(B3) Zu jedem $B_1 \in \mathcal{B}$ existieren ein $B_j \in \mathcal{B}$ und eine stetige reelle Funktion f auf X , derart daß gilt:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in B_1 \\ 0 & x \in \complement B_j \end{cases}$$

Definition 1.2: Eine Teilmenge des lokalbeschränkten Raumes $(X, \mathcal{B})$ heißt genau dann beschränkt, wenn sie in einem Element von $\mathcal{B}$ enthalten ist.

Definition 1.3 $(X, \mathcal{B})$ heißt ein beschränkter Raum, wenn $(X, \mathcal{B})$ lokalbeschränkt und X als Teilmenge von $(X, \mathcal{B})$ beschränkt ist. In diesem Fall heißt auch das Beschränkungssystem $\mathcal{B}$ entartet.

Man verifiziert leicht die folgenden Eigenschaften der beschränkten Teilmengen eines lokalbeschränkten Raumes:

Satz 1.1 (GOULD [15]):

- (a) Jede endliche Vereinigung von beschränkten Mengen sowie jede Teilmenge einer beschränkten Menge ist beschränkt;
- (b) Der Abschluß einer beschränkten Menge ist beschränkt;
- (c) Jeder Punkt von X besitzt eine beschränkte Umgebung;
- (d) Jede relativ kompakte Menge ist beschränkt.

Die Eigenschaft (c) insbesondere rechtfertigt die Bezeichnung "lokalbeschränkt" in Analogie zur Definition der lokalkompakten Räume. Diese können als **spezielle** lokalbeschränkte Räume aufgefaßt werden, in denen die kompakten Mengen ein Beschränkungssystem bilden. Genauer gilt:

Satz 1.2: X sei ein vollständig regulärer Raum und $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{K}}$ das System aller kompakten Teilmengen von X . Dann gilt: $(X, \mathcal{B})$ ist genau dann lokalbeschränkt, wenn X lokalkompakt ist, und das System $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{K}}$ ist das grösste Beschränkungssystem auf X .

Beweis: Die Bedingung ist notwendig, da nach Satz 1.1 (c) und Def. 1.2 jeder Punkt von X eine relativ kompakte Umgebung besitzt. Umgekehrt erfüllt das System $\mathcal{B}$ offensichtlich die Bedingungen (B1) und (B2). Da n. Vor. jeder Punkt von X eine kompakte Umgebung besitzt, folgt (B3) aus der vollständigen Regularität von X . Der Rest der Behauptung folgt aus Satz 1.1 (d). $\square$

Weitere Beispiele von lokalbeschränkten Räumen $(X, \mathcal{B})$ sind:

- (i) X sei ein metrischer Raum und $\mathcal{B}$ das System aller offenen (oder abgeschlossenen) Kugeln von X ;
- (ii) X sei ein separierter topologischer Vektorraum und $\mathcal{B}$ ein aufsteigend filtrierendes System von symmetrischen konvexen Körpern in X , das X überdeckt. (Die Eigenschaft $(\mathcal{B}_3)$ zeigt mit Hilfe des Minkowski-Funktionalen);
- (ii') X sei ein lokalkonvexer Hausdorff-Raum, dessen Topologie durch die Familie der Halbnormen $(p_i)_{i \in I}$ gegeben ist.
 $\mathcal{B}^1$ sei das System

$$([p_i \leq n])_{n \in \mathbb{N}}$$

Dann ist für jedes $i \in I$ $(X, \mathcal{B}^1)$ lokalbeschränkt;

- (iii) X sei ein separierter topologischer Vektorraum und $\mathcal{B}$ das System aller im üblichen Sinne beschränkten Teilmengen von X , d.h. aller Mengen, die von jeder Nullumgebung absorbiert werden. Dann gilt nach [22], S.163, sowie Satz 1.1 (c): $(X, \mathcal{B})$ ist dann und nur dann lokalbeschränkt (im Sinne der Def. 2.1), wenn X quasinormierbar ist. In diesem Fall stimmt somit die Definition der Lokalbeschränktheit mit der von KÖTHE [22] für topologische Vektorräume gegebenen überein.

1.2 Definition eines Maßes

I.f. bezeichne $(X, \mathcal{B})$ stets einen lokalbeschränkten Raum X mit Beschränkungssystem $\mathcal{B}$. Für eine stetige Funktion f auf X bezeichne T_f den Träger von f , d.h. den Abschluß der Menge $[f \neq 0]$ in X . Mit $\mathcal{K}(X, \mathcal{B})$ (oder kurz $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ oder $\mathcal{K}$) werde die Menge aller stetigen und beschränkten reellen Funktionen auf X , deren Träger (bzgl. $\mathcal{B}$) beschränkt ist, bezeichnet.

$\mathcal{K}(X, \mathcal{B})$ ist wegen (B1) offensichtlich ein Unterring des Ringes $\mathcal{C}_b(X)$ aller stetigen und beschränkten reellen Funktionen auf X und ein Vektorverband bzgl. der induzierten Ordnung.

Man verifiziert leicht, daß das System

$$\mathcal{B}_0 := (E(g))_{g \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}}}$$

ebenfalls ein Beschränkungssystem auf X bildet, das zu $\mathcal{B}$ äquivalent ist, d.h. die beschränkten Mengen in X bzgl. $\mathcal{B}_0$ und $\mathcal{B}$ stimmen überein. $\mathcal{B}_0$ heißt das kanonische Beschränkungssystem von X . Wir setzen fortan stets voraus, daß die betrachteten lokalbeschränkten Räume mit ihrem kanonischen Beschränkungssystem versehen sind.

Für eine beschränkte Teilmenge Y von X bezeichne $\mathcal{K}(X, Y)$ den Banachraum aller Funktionen aus $\mathcal{C}_b(X)$, deren Träger in Y enthalten ist, versehen mit der Topologie $\mathcal{T}_Y^u$ der gleichmäßigen Konvergenz auf Y . Der Ring $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ ist p. Def. die Vereinigung der aufsteigend filtrierenden Familie der Banachräume $\mathcal{K}(X, B)_{B \in \mathcal{B}}$. Für $B_1 \subset B_j$ ist die kanonische Injektion von $\mathcal{K}(X, B_1)$ in $\mathcal{K}(X, B_j)$ $\mathcal{T}_{B_1}^u \rightarrow \mathcal{T}_{B_j}^u$ stetig. Somit existiert der induktive Limes

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^u = \lim_{B \in \mathcal{B}} \text{ind } \mathcal{T}_B^u.$$

Nach [8], chap.2, ist $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^u$ eine lokalkonvexe Hausdorff-Topologie auf $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$, und $(\mathcal{K}_{\mathcal{B}}, \mathcal{T}_{\mathcal{B}}^u)$ ist als induktiver Limes von Banachräumen tonneliert [8], chap.3.

$\mathcal{K}_{\mathcal{B}}^{\circ}$ bezeichne den ordnungstheoretischen Dualraum von $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$, d.h. $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}^{\circ} = {}_+\mathcal{K}_{\mathcal{B}} - {}_+\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$.

Definition 1.4: Maß auf $(X, \mathcal{B})$ heißt jedes Element $\mu \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}}^{\circ}$. $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ (oder $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$) bezeichne die Menge aller Maße auf $(X, \mathcal{B})$.

Nach [7], chap. II, ist $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ identisch mit der Menge aller relativ beschränkten Linearformen auf $\mathcal{K}(X, \mathcal{B})$ und ein vollständiger Rieszscher Raum bzgl. der zu $\mathcal{K}$ dualen Ordnung.

Theorem 1 : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ ist der Dualraum von $(\mathcal{K}_{\mathcal{B}}, \mathcal{T}_{\mathcal{B}}^u)$.

M.A.W.: Eine Linearform μ auf $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ ist genau dann ein Maß auf $(X, \mathcal{B})$, wenn sie folgender Bedingung genügt:

$$(1) \quad \forall B \in \mathcal{B} \quad \exists M_B \geq 0 \quad \forall g \in \mathcal{K}(X, B) : |\mu(g)| \leq M_B \|g\|$$

Beweis: Die Bedingung ist hinreichend. Sei nämlich μ eine Linearform auf $\mathcal{K}$ und $g \in \mathcal{K}_+$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{K}$ mit $|f| \leq g$: $T_f \subset T_g \subset B$ für ein $B \in \mathcal{B}$. Aus (1) folgt die Existenz einer positiven Zahl M_B , derart daß gilt: $|\mu(f)| \leq M_B \|f\| \leq M_B \|g\|$. Somit ist μ relativ beschränkt.

Für den Beweis der Notwendigkeit genügt es zu zeigen, daß jede positive Linearform auf $\mathcal{K}$ stetig ist. Nach Axiom (B3) existiert zu jedem $B \in \mathcal{B}$ ein $g_0 \in \mathcal{K}_+$ mit $B \subset E(g_0)$. Somit gilt für alle $g \in \mathcal{K}(X, B)$: $|g| \leq \|g\| g_0$. Für jede positive Linearform μ auf $\mathcal{K}$ und jede Funktion $g \in \mathcal{K}(X, B)$ folgt somit: $|\mu(g)| \leq \mu(|g|) \leq \mu(g_0) \|g\|$. $\square$

Definition 1.5: $\mathcal{M}_b(X, \mathcal{B})$ (oder kurz $\mathcal{M}_b$) bezeichne den Dualraum vom $\mathcal{K}(X, \mathcal{B})$ versehen mit der Topologie $\mathcal{T}^u$ der gleichmäßigen Konvergenz auf X .

Da für jedes Beschränkungssystem $\mathcal{B}$ auf X die Topologie $\mathcal{T}^u$ gröber ist als die Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^u$, gilt nach Theor. 1 stets $\mathcal{M}_b \subset \mathcal{M}$. $\mathcal{M}_b$ ist ein Banachraum bzgl. der Norm

$$\|\mu\| = \sup \{ |\mu(g)| : g \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}}, \|g\| \leq 1 \}$$

Ist $(X, \mathcal{B})$ beschränkt, so ist wegen $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^u = \mathcal{T}^u$ jedes Maß auf X beschränkt (s. Bsp. (ii) und (iii)).

Beispiele von Maßen:

(i) Sei $(X, \mathcal{B})$ lokalkompakt (d.h. $\mathcal{B}$ sei das System der kompakten Teilmengen von X - vgl. Satz 1.2). Dann ist $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ die Menge aller Radonmaße auf X [7].

(ii) Sei $(X, \mathcal{B})$ beschränkt. Dann ist $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ die Menge $\mathcal{C}_b(X)$ aller stetigen und beschränkten reellen Funktionen auf X . Nach Theor. 1 ist $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}) = \mathcal{M}_b(X)$ der Dualraum $\mathcal{C}_b'(X)$, d.h. die Menge aller Maße auf X im Sinne von ALEXANDROFF - VARADARAJAN [1], [35].

(iii) Sei $(X, \mathcal{B})$ beschränkt und $\mathcal{M}^t(X, \mathcal{B})$ die Menge aller Linearformen μ auf $\mathcal{K}_{\mathcal{B}} = \mathcal{C}_b(X)$ mit der Eigenschaft:

$$(\varepsilon, K) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ kp. } K \subset X \quad \forall g \in \mathcal{C}_b(X) : \\ \|g\| \leq 1, \quad g|_K = 0 \quad \leadsto |\mu(g)| < \varepsilon.$$

Dann ist $\mathcal{M}^t(X, \mathcal{B})$ die Menge aller Maße auf X im Sinne von L. SCHWARTZ [31]. (Die Maße, die der (ε, K) -Bedingung von SCHWARTZ genügen, sind genau die straffen Maße auf $(X, \mathcal{B})$ - vgl. Def. 1.6 (a)).

1.3 Verschiedene Topologien auf $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$

Für ein beliebiges System $\mathcal{J}$ von beschränkten Teilmengen von $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ ist auf $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ die lokalkonvexe $\mathcal{J}$ -Topologie der gleichmäßigen [auf den Mengen von $\mathcal{J}$ erklärt ([8], chap. 3). $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}(X, \mathcal{B})$ (oder kurz $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}$) bezeichne den lokalkonvexen Raum $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ versehen mit der $\mathcal{J}$ -Topologie. Ist die Vereinigung der Mengen aus $\mathcal{J}$ eine totale Teilmenge von $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$, so ist $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}$ hausdorffsch; überdeckt $\mathcal{J}$ den Raum $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$, so ist $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}$ außerdem quasivollständig, da $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ tonneliert ist ([8], chap. 3, p. 31).

Eine kompakte Teilmenge H in $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ heiße strikt kompakt, wenn

[Konvergenz

ein $B \in \mathcal{B}$ existiert mit $H \subset \mathcal{K}(X, B)$. Man betrachte folgende Systeme $\mathcal{S}$ von Teilmengen aus $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$:

$\mathcal{S}_1$:= System von einpunktigen Mengen, deren Vereinigung total ist in $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$;

$\mathcal{S}_2$:= System aller einpunktigen Mengen von $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$;

$\mathcal{S}_3$:= System aller strikt kompakten Mengen von $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$;

$\mathcal{S}_4$:= System aller kompakten Mengen von $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$;

$\mathcal{S}_5$:= System aller beschränkten Mengen von $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$.

Mit $\mathcal{T}_i$ ($i = 1, \dots, 5$) werden die zugehörigen $\mathcal{S}_i$ -Topologien bezeichnet. Die $\mathcal{T}_2$ -Topologie heißt auch die vage Topologie auf $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$. Aufgrund der Definition der $\mathcal{S}$ -Topologie ist jede der fünf Topologien jeweils größer als die folgende.

Da der Raum $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ nach 1.2 tonneliert ist und die vage Topologie auf $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ nichts anderes ist als die schwache Topologie bzgl. der Dualität $\langle \mathcal{M}_{\mathcal{B}}, \mathcal{K}_{\mathcal{B}} \rangle$, folgt aus [8], chap. 4, p. 65, unmittelbar das folgende Resultat:

Satz 1.3: Sei H eine Teilmenge von $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) H ist vag beschränkt.
- (ii) H ist vag relativ kompakt.
- (iii) H ist gleichgradig stetig.
- (iv) $\forall B \in \mathcal{B} \exists M_B \geq 0 \forall \mu \in H \forall g \in \mathcal{K}(X, B) : |\mu(g)| \leq M_B \|g\|$.

Analog wie in [7], p. 62, folgt aus dem vorstehenden Satz:

Satz 1.4: (a) Die beschränkten Mengen der lokalkonvexen Räume

$\mathcal{M}_{\mathcal{S}_i}(X, \mathcal{B})$ sind die gleichen für $i = 2, 3, 4, 5$.

- (b) Auf jeder vag beschränkten Teilmenge von $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ fallen die Topologien $\mathcal{T}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) zusammen.

Beweis: (a) Da jede der Topologien $\mathcal{T}_i$ ($i = 2, 3, 4, 5$) feiner ist als die vorhergehende, ist jede beschränkte Menge in $\mathcal{M}_{\delta_i}$ ($i = 2 \dots 5$) vag beschränkt und somit nach Satz 1.3 gleichgradig stetig. Jede gleichgradig stetige Menge ist aber nach [8], chap. 3, p. 26, beschränkt bzgl. jeder δ -Topologie.
 (b) Da jede vag beschränkte Teilmenge von $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ gleichgradig stetig ist, folgt die Behauptung aus [6], chap. X, p. 29. _/

1.4 Klassifizierung der Maße nach ihren Stetigkeitseigenschaften

Bekanntlich besitzt jedes Radonmaß μ auf einem lokalkompakten Raum X die folgende Stetigkeitseigenschaft auf dem Ring $\mathcal{K}(X)$ aller stetigen reellen Funktionen auf X mit kompaktem Träger:

(M^*) Für jedes aufst. filtr. System $H \subset \mathcal{K}(X)$, dessen obere Einhüllende zu $\mathcal{K}(X)$ gehört, gilt: $\mu(\sup_{g \in H} g) = \sup_{g \in H} \mu(g)$.

Daß ein Maß auf $(X, \mathcal{B})$ die Eigenschaft (M^*) nicht zu besitzen braucht, selbst wenn X lokalkompakt ist, zeigt das folgende Beispiel:

Beispiel 1: $X = (0, 1)$ sei das offene Einheitsintervall mit der üblichen Topologie; βX seine Stone-Čech-Kompaktifizierung. Das Beschränkungssystem $\mathcal{B}$ sei entartet, also $\mathcal{K}_{\mathcal{B}} = \mathcal{C}_b(0, 1)$. Für jedes $g \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ bezeichne $\hat{g}$ die eindeutige stetige Fortsetzung auf βX . Auf $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ werde die Linearform μ definiert durch $\mu(g) := \hat{g}(x_0)$ für einen festen Punkt $x_0 \in \beta X \setminus X$. Offensichtlich ist μ positiv und somit ein Maß auf $(X, \mathcal{B})$. μ genügt jedoch nicht der Bedingung (M^*). Zu jedem $x \in X$ existiert nämlich ein $g_x \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ mit $0 \leq g_x \leq 1$, $g_x(x) = 1$ und $g_x(x_0) = 0$. Somit folgt:

$$1 = \mu(1) = \mu\left(\sup_{x \in X} g_x\right) \neq \sup_{x \in X} \mu(g_x) = 0.$$

Es ist somit eine Klassifizierung der Maße auf $(X, \mathcal{B})$ nach ihren Stetigkeitseigenschaften erforderlich, wie sie u.W. zuerst 1957 von LE CAM [24] für beschränkte Maße eingeführt worden ist. Für die i. allg. nicht beschränkten Maße auf $(X, \mathcal{B})$ versagt jedoch die LE CAMsche Definition der "Straffheit", da die Träger eines Systems von stetigen Funktionen, das gleichmäßig auf den kompakten Mengen gegen Null strebt, "fortlaufen" und beliebig großes Maß annehmen können. Es ist jedoch klar, wie die Definition der Straffheit für nicht beschränkte Maße zu modifizieren ist, wobei sich zum ersten Mal die Bedeutung der Einführung des Beschränkungssystems $\mathcal{B}$ auf X zeigt.

Für jedes $B \in \mathcal{B}$ bezeichne $\mathcal{T}_B^c$ die Topologie der kompakten Konvergenz auf $\mathcal{K}(X, B)$, die von der Familie der Halbnormen

$$p_K(g) = \sup_{x \in K} |g(x)| = \|g\|_K \quad (K \text{ kompakt } \subset B)$$

erzeugt wird. Da jedes $B \in \mathcal{B}$ abgeschlossen ist, ist für $B_1 \subset B_2$ die kanonische Injektion von $\mathcal{K}(X, B_1)$ in $\mathcal{K}(X, B_2)$ $\mathcal{T}_{B_1}^c - \mathcal{T}_{B_2}^c$ -stetig. Somit existiert nach [8], chap. 2, p. 72/76, der induktive Limes

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^c = \lim_{B \in \mathcal{B}} \text{ind } \mathcal{T}_B^c$$

der lokalkonvexen Topologien $\mathcal{T}_B^c$. Die lokalkonvexe Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^c$ auf $\mathcal{K}(X, \mathcal{B})$ heiße die Topologie der $\mathcal{B}$ -kompakten Konvergenz. Aus der Eigenschaft des induktiven Limes sowie aus der Definition von $\mathcal{T}_B^c$ folgt: Die Linearform μ auf $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ ist genau dann stetig bzgl. der Topologie der $\mathcal{B}$ -kompakten Konvergenz, wenn gilt:

$$(2) \quad \forall B \in \mathcal{B} \quad \exists \text{ kp. } K \subset B \quad \exists M_B \geq 0 \quad \forall g \in \mathcal{K}(X, B) : \\ |\mu(g)| \leq M_B \|g\|_K .$$

Spezialfälle der Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^c$:

- (i) Ist $(X, \mathcal{B})$ beschränkt, so ist offenbar $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^c$ die Topologie der kompakten Konvergenz auf $\mathcal{C}_b(X)$.
- (ii) Ist $(X, \mathcal{B})$ lokalkompakt, so ist $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^c$ die "starke" Topologie auf $\mathcal{K}(X)$ ([7], p. 41), d.h. der induktive Limes der Topologien der gleichmäßigen Konvergenz auf den Banachräumen $\mathcal{K}(X, K)$ (K kp. in X).

Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{B}} &:= \{ g \in \mathcal{K}(X, \mathcal{B}) : \|g\| \leq 1 \} \\ \sum_B &:= \{ g \in \mathcal{K}(X, B) : \|g\| \leq 1 \} \quad (B \in \mathcal{B}). \end{aligned}$$

Nunmehr lassen sich die Maße auf $(X, \mathcal{B})$ wie folgt klassifizieren:

Definition 1.6: Sei μ ein Maß auf $(X, \mathcal{B})$. Dann heiße:

- (a) μ $\mathcal{G}$ -stetig $\iff_{\text{df.}}$ Für jede abst. Folge $(g_n) \subset \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ mit $g_n \downarrow 0$ gilt $\mu(g_n) \rightarrow 0$;
- (b) μ $\mathcal{T}$ -stetig $\iff_{\text{df.}}$ Für jedes abst. filtr. System $(g_\alpha) \subset \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ mit $g_\alpha \downarrow 0$ gilt $\mu(g_\alpha) \rightarrow 0$;
- (c) μ straff $\iff_{\text{df.}}$ μ ist stetig auf $\sum_{\mathcal{B}}$ bzgl. der Topologie der $\mathcal{B}$ -kompakten Konvergenz.

Genügt μ keiner der Bedingungen (a) - (c), so heiße μ unstetig.

$\mathcal{M}^{\mathcal{G}}$, $\mathcal{M}^{\mathcal{T}}$, $\mathcal{M}^t$ bezeichne resp. die Teilmenge der $\mathcal{G}$ -stetigen, $\mathcal{T}$ -stetigen und straffen Maße von $\mathcal{M} = \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$. Dann gelten folgende Inklusionen: $\mathcal{M}^t \subset \mathcal{M}^{\mathcal{T}} \subset \mathcal{M}^{\mathcal{G}} \subset \mathcal{M}$.

Hierbei bedarf nur die erste Inklusion einer Erläuterung; die restlichen sind aufgrund der Definitionen evident. Sei also (g_α) ein abst. filtr. System in $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$, das gegen Null konvergiert. Offenbar gilt $(g_\alpha) \subset \mathcal{K}(X, B)$ für ein $B \in \mathcal{B}$. Nach dem Satz von DINI [6], chap. X, strebt (g_α) gleichmäßig gegen

Null auf den kompakten Teilmengen von B . Somit folgt aus der Straffheit von μ : $\lim_{\alpha} \mu(g_{\alpha}) = \lim_{\alpha} \mu(g_{\alpha} \wedge 1) = 0$.

Satz 1.5: S bezeichne eine der Mengen $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^{\sigma}$, $\mathcal{M}^{\tau}$ oder $\mathcal{M}^t$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $\mu \in S$
- (ii) $\mu^+, \mu^- \in S$
- (iii) $|\mu| \in S$.

Der Beweis verläuft analog zu den entsprechenden Sätzen 7, 8 und 9 im Teil von VARADARAJAN [35], wobei lediglich überall der Ring $\mathcal{C}(X)$ durch den Ring $\mathcal{K}(X, \beta)$ zu ersetzen ist.

In 4.2 werden Charakterisierungen der Stetigkeitseigenschaften der Maße auf (X, β) mit Hilfe des Darstellungssatzes gegeben. Das Kapitel 5 ist den Zusammenhängen zwischen der Struktur eines lokalbeschränkten Raumes und den Stetigkeitseigenschaften seiner Maße gewidmet.

1.5 Trägerfilter und Träger von Maßen

Der Träger eines Radonmaßes μ ist bekanntlich das Komplement der größten offenen μ -Nullmenge. Die Existenz einer solchen Menge hängt mit der $\mathcal{T}$ -Stetigkeit der Radonmaße zusammen. Aus diesem Grund definieren VARADARAJAN [35] und KRICKEBERG [23] den Träger nur für $\mathcal{T}$ -stetige Maße. Daß diese Definition für allgemeinere Maße wie die in 1.2 definierten versagt, kann man sich leicht an dem nachstehenden Beispiel 2 klar machen.

Der Begriff eines "Trägers" ist jedoch auch für nicht $\mathcal{T}$ -stetige Maße sehr nützlich, wie sich insbesondere in den Paragraphen 4 und 5 zeigen wird. Da sich einem nicht $\mathcal{T}$ -stetigen Maß jedoch keine ausgezeichnete Teilmenge von X als Träger

zuordnen läßt, definieren wir:

Definition 1.7: (a) Sei μ ein Maß auf $(X, \mathcal{B})$. Für eine beliebige Teilmenge Y von X bedeute die Aussage " Y trägt μ ", daß für alle Funktionen g aus $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$, welche auf Y verschwinden, gilt $|\mu|(|g|) = 0$.

(b) Das System der Teilmengen

$$\mathcal{T}_{\mu} := \{ Z \in \mathcal{Z}(\mathcal{K}) : Z \text{ trägt } \mu \}$$

heiße der Trägerfilter von μ .

Die Beschränkung auf z -Mengen in der Definition von $\mathcal{T}_{\mu}$ ist notwendig, damit $\mathcal{T}_{\mu}$ einen Filter bildet. Daß $\mathcal{T}_{\mu}$ tatsächlich ein z -Filter [12] ist, wird in 5.3 mit Hilfe des Darstellungssatzes gezeigt.

Beispiel 2: $(X, \mathcal{B})$, βX und μ seien wie in Beispiel 1 definiert. Dann ist der Trägerfilter $\mathcal{T}_{\mu}$ der z -Ultrafilter A^{p_0} (siehe [12], 6.5); d.h. das System aller z -Mengen in X mit p_0 als Adhärenzpunkt.

Das obige Beispiel zeigt, daß der Filter $\mathcal{T}_{\mu}$ auf X nicht "fixiert" zu sein braucht, d.h. es kann gelten $\bigcap \mathcal{T}_{\mu} = \emptyset$. Für $\mathcal{T}$ -stetige Maße gilt jedoch:

Satz 1.6: Sei $\mu \in \mathcal{M}^{\tau}(X, \mathcal{B})$. Dann existiert eine kleinste abgeschlossene Teilmenge von X , welche μ trägt, nämlich $T_{\mu} = \bigcap \mathcal{T}_{\mu}$. T_{μ} heißt dann der Träger von μ .

Beweis: Sei $g \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ mit $T_{\mu} \subset Z(g)$. Man betrachte folgendes aufst. filtr. System in $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$:

$$\mathcal{D} := \{ f \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}} : 0 \leq f \leq |g|, Z \subset Z(f) \text{ für ein } Z \in \mathcal{T}_{\mu} \}.$$

Wegen der vollständigen Regularität von X gilt $\sup \mathcal{D} = |g|$.

Aus der $\mathcal{T}$ -Stetigkeit von $|\mu|$ folgt somit:

$$|\mu|(|g|) = \sup_{f \in \mathcal{D}} |\mu|(f) = 0.$$

Da das System $\mathcal{Z}(\mathcal{K})$ nach [15], p. 228, eine abgeschlossene Basis von X bildet, ist T_μ die kleinste abgeschlossene Menge, die μ trägt. $_$

Der Träger T_μ läßt sich wie folgt lokal charakterisieren:

Satz 1.7: Der Punkt $x_0 \in X$ gehört genau dann zu T_μ , wenn zu jeder beschränkten Umgebung V von x_0 ein $g \in \mathcal{K}(X, V)$ existiert mit $\mu(g) \neq 0$.

Beweis: Die Bedingung ist notwendig. Denn ang. es existiere eine beschränkte Umgebung V von x_0 , derart daß für alle $g \in \mathcal{K}(X, V)$ gilt $\mu(g) = 0$. Wegen der vollständigen Regularität von X existiert insbesondere ein $g_0 \in \mathcal{K}(X, V)$ mit $g_0(x_0) = 1$. Jede Funktion $g \in \mathcal{K}_B$, die auf $Z(g_0)$ verschwindet, gehört dann zu $\mathcal{K}(X, V)$ und hat somit das Maß Null. Also gilt $Z(g_0) \in \mathcal{T}_\mu$, aber $x_0 \notin Z(g_0)$. Somit $x_0 \notin T_\mu$.

Sei umgekehrt $x_0 \notin T_\mu$. Dann existiert ein $Z \in \mathcal{T}_\mu$ und eine beschränkte Umgebung V von x_0 mit $V \cap Z = \emptyset$. Somit gilt für alle $g \in \mathcal{K}(X, V)$: $g|_Z = 0$. Also $\mu(g) = 0$. $_$

Satz 1.8: Wenn zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{K}_B$ auf einer Menge $Z \in \mathcal{T}_\mu$ übereinstimmen, so gilt $\mu(f) = \mu(g)$.

Beweis: n. Vor. gilt $Z \subset Z(f - g)$. Somit folgt:

$$|\mu(f - g)| \leq |\mu|(|f - g|) = 0. _$$

Korollar: Ist die Funktion $g \in \mathcal{K}_B$ positiv auf einer Menge $Z \in \mathcal{T}_\mu$, so gilt: $|\mu|(g) \geq 0$.

Beweis: Aus $g = |g|$ auf Z und $\mathcal{T}_\mu = \mathcal{T}_{|\mu|}$ folgt:

$$|\mu|(g) = |\mu|(|g|) \geq 0. _$$

1.6 Maße mit endlichem Träger

$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0(X)$ bezeichne die Menge der Diracschen Maße auf X , d.h. die Menge der Maße δ_x , die durch die Linearformen $g \rightarrow g(x)$ ($g \in \mathcal{K}_{\mathbb{B}}$) auf $(X, \mathbb{B})$ definiert sind.

$\mathcal{E} = \mathcal{E}(X)$ sei der von $\mathcal{E}_0$ aufgespannte Vektorraum.

Satz 1.9: Das Maß $\nu \in \mathcal{M}(X, \mathbb{B})$ gehört genau dann zu $\mathcal{E}(X)$, wenn der Träger T_ν existiert und endlich ist.

Beweis: Offenbar ist jedes Maß der Form

$$\nu = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{x_j}$$

$\mathbb{T}$ -stetig. Somit existiert T_ν nach Satz 1.6. Aus der vollständigen Regularität von X und der Def. 1.7 folgt außerdem $T_\nu = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Sei umgekehrt $T_\nu = \{x_1, \dots, x_n\}$ der Träger des Maßes $\nu \in \mathcal{M}(X, \mathbb{B})$. Dann ist $\nu(g) = 0$ für jede Funktion $g \in \mathcal{K}_{\mathbb{B}}$ mit $g(x_i) = 0$. D.h. aber $\delta_{x_i}(g) = 0$ für $i = 1, \dots, n$. Somit ist ν nach einem bekannten Satz der linearen Algebra Linearkombination der δ_{x_i} . /

Aus der Theorie der Radonmaße ist bekannt, daß jedes positive Radonmaß auf einem lokalkompakten Raum X ν g adhärent ist dem Kegel der positiven Maße auf X mit endlichem Träger ([9], p.127). Dieser Sachverhalt ist jedoch nicht charakteristisch für Radonmaße. Wir zeigen, daß er auch für die Maße auf einem lokalbeschränkten Raum gilt. Doch auch diese Tatsache ist nur ein Spezialfall eines wesentlich allgemeineren Zusammenhangs, der in Theorem 2 bewiesen wird. Dieses Theorem ist grundlegend für den Aufbau der Integrationstheorie in § 2.

Zur Formulierung des Theorems werden zunächst folgende Be-

zeichnungen eingeführt:

X sei eine beliebige Menge und $\mathcal{R}$ ein Vektorraum reeller Funktionen auf X mit der Eigenschaft:

$$(3) \quad \forall x \in X \quad \exists f \in \mathcal{R} : f(x) \neq 0.$$

$\mathcal{E} = \mathcal{E}(X)$ sei wie oben definiert. Dann bildet $\langle \mathcal{E}, \mathcal{R} \rangle$ ein separiertes Dualsystem. Durch die Familie der Halbnormen $p(L) = |L(f)|$ ($f \in \mathcal{R}$) wird auf $\mathcal{R}^*$ eine uniforme Struktur $U_{\mathcal{R}}$, die mit der schwachen Topologie $\sigma(\mathcal{R}^*, \mathcal{R})$ verträglich ist, definiert.

Theorem 2: C sei ein konvexer, spitzer und $\sigma(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ abgeschlossener Kegel in $\mathcal{R}$. $\mathcal{E}_C$ und $\mathcal{R}_C^*$ seien die entsprechenden dualen Kegel in $\mathcal{E}$ bzw. $\mathcal{R}^*$. $\gamma_{\mathcal{R}}$ bezeichne die Vervollständigung bzgl. der uniformen Struktur $U_{\mathcal{R}}$. Dann gilt:

$$\gamma_{\mathcal{R}} \mathcal{E}_C = \mathcal{R}_C^*.$$

Beweis: (i) $\mathcal{R}_C^*$ ist vollständig bzgl. $U_{\mathcal{R}}$. Sei nämlich $\mathcal{F}$ ein Cauchyfilter auf $\mathcal{R}_C^*$. Da n. Def. von $U_{\mathcal{R}}$ jedes $f \in \mathcal{R}$ auf $\mathcal{R}_C^*$ gleichmäßig stetig ist, ist der Bildfilter $f(\mathcal{F})$ ein Cauchyfilter auf $\mathcal{R}$ und konvergiert somit gegen eine reelle Zahl $L_0(f)$. Die Linearform $f \rightarrow L_0(f)$ ($f \in \mathcal{R}$) ist somit der Limes des Filters $\mathcal{F}$ in $\mathcal{R}^*$. Da für $f \in C$ außerdem gilt $f(\mathcal{F}) \subset \mathbb{R}_+$ und somit $L_0(f) \geq 0$, liegt L_0 in $\mathcal{R}_C^*$.

(ii) Es gilt $\overline{\mathcal{E}_C} = \mathcal{R}_C^*$. Da $U_{\mathcal{R}}$ hausdorffsch ist, folgt aus (i): $\mathcal{R}_C^*$ ist abgeschlossen in $\mathcal{R}^*$. Somit $\overline{\mathcal{E}_C} \subset \mathcal{R}_C^*$.

Ang. es existiert ein $L_0 \in \mathcal{R}_C^* \setminus \overline{\mathcal{E}_C}$. Da $\overline{\mathcal{E}_C}$ eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge des lokalkonvexen Raumes $\mathcal{R}^*$ ist, folgt nach einem bekannten Trennungssatz die Existenz einer abgeschlossenen Hyperebene $H \neq 0$ in $\mathcal{R}^*$, die $\overline{\mathcal{E}_C}$ und L_0 streng trennt. H ist von der Form $H = \{ L \in \mathcal{R}^* : L(f) = 1 \}$ für ein $0 \neq f \in \mathcal{R}$. Es gilt also:

$$(a) \quad v(f) < 1 \quad \text{für alle } v \in \overline{E}_C$$

und

$$(b) \quad L_0(f) > 1 .$$

Aus (a) folgt $\lambda \cdot v(f) < 1$ für alle $\lambda > 0$, was nur mit

$$(4) \quad v(f) \leq 0 \quad \text{für alle } v \in E_C$$

verträglich ist. Wir zeigen, daß aus (4) folgt: $-f \in C$.

Denn falls $-f \notin C$, so liefert eine nochmalige Anwendung des Trennungssatzes diesmal auf den konvexen und n. Vor. $\langle \mathbb{R}, E \rangle$ abgeschlossenen Kegel C und den Punkt $-f \in \mathbb{R}$ die Existenz einer abgeschlossenen Hyperebene H' in $\mathbb{R}$ der Form $v(h) = 1$ ($h \in \mathbb{R}$), die C und $-f$ streng trennt. D.H. aber: es existiert ein $0 \neq v \in E$ mit der Eigenschaft:

$$(a') \quad v(g) < 1 \quad \text{für alle } g \in C$$

und

$$(b') \quad v(-f) > 1 .$$

Aus (a') folgt $v(\lambda g) = \lambda v(g) < 1$ für alle $\lambda > 0$ und somit $v(g) \leq 0$ für alle $g \in C$. D.h. aber $-v \in E_C$. Somit gilt $v(-f) = -v(f) \leq 0$ im Widerspruch zu (b'). Also liegt $-f$ in C . Für $L_0 \in \mathbb{R}_C^*$ gilt somit $L_0(f) \leq 0$. Das ist aber ein Widerspruch zu (b). Hiermit ist (ii) bewiesen. — Da $U_{\mathbb{R}}$ hausdorffsch ist, folgt aus (i) und (ii) die Behauptung. $\swarrow$

Korollar 1: Jedes positive Maß μ auf $(X, \mathcal{B})$ ist vag (siehe 1.3) adhärent dem konvexen Kegel der positiven Maße auf $(X, \mathcal{B})$, deren Träger endlich und in jeder Menge des Trägerfilters $\mathcal{T}_{\mu}$ enthalten ist.

Beweis: Man wähle $\mathbb{R} = \mathbb{K}_{\mathbb{B}}$ und $C = \mathbb{R}_+$. Dann ist $\mathcal{M}_+(X, \mathcal{B})$ gleich $\mathbb{R}_+^*$ und die vage Topologie auf $\mathcal{M}_+$ wird durch die uniforme Struktur $U_{\mathbb{R}}$ gegeben. Damit folgt der erste Teil der Behauptung unmittelbar aus Theor. 2. Der Rest der Behauptung ergibt

sich aus der vollständigen Regularität von X und der Definition von $\mathcal{T}_\mu$. $_$

Korollar 2: Jedes $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathbb{B})$ ist vag adhärent der Menge aller $\nu \in \mathcal{E}(X)$, deren Träger in jedem $Z \in \mathcal{T}_\mu$ enthalten ist.

Beweis: Dies folgt wegen $\mu = \mu^+ - \mu^-$ und
 $\mathcal{T}_\mu = \{ Z = Z^+ \cup Z^- : Z^+ \in \mathcal{T}_{\mu^+}, Z^- \in \mathcal{T}_{\mu^-} \}$ unmittelbar aus Kor. 1. $_$

Korollar 3: $\mathcal{M}_+(X, \mathbb{B})$ ist ein vag vollständiger konvexer Kegel in $\mathcal{M}(X, \mathbb{B})$.

Beweis: Man wähle $\mathcal{R}$ und C wie in Kor. 1. $_$

§ 2 Fortsetzung eines Maßes. $\mathcal{L}^p$ -Räume.

2.1 Fortsetzung eines Maßes auf die integrierbaren Funktionen

Sei $(X, \mathcal{B})$ ein lokalbeschränkter Raum und μ ein positives⁺ Maß auf $(X, \mathcal{B})$. P. Def. ist μ also eine positive Linearform auf dem Ring $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$. Bezieht man den funktionalanalytischen Standpunkt zur Maßtheorie, wie er zuerst 1911 von YOUNG [36] und 1918 von DANIELL [10] sowie später von STONE [33], BOURBAKI [7] und LOOMIS [25] eingenommen worden ist, so besteht die wesentliche Aufgabe einer Maßtheorie auf $(X, \mathcal{B})$ darin, das Elementarintegral $\mu|_{\mathcal{K}_{\mathcal{B}}}$ auf eine größere Menge $\mathcal{L}^1(\mu)$ von μ -integrierbaren Funktionen fortzusetzen. Je nach Stetigkeit des Maßes μ (siehe 1.4) bieten sich hierzu die verschiedenen zitierten Integrationstheorien an. So ist für beliebiges $\mu \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{B})$ $(\mathcal{K}_{\mathcal{B}}, \mu)$ ein Elementarintegral im Sinne von LOOMIS; ist μ σ -stetig bzw. τ -stetig, so ist $(\mathcal{K}_{\mathcal{B}}, \mu)$ außerdem ein erstes bzw. zweites STONESches Elementarintegral. Ist schließlich $(X, \mathcal{B})$ lokalkompakt, so steht die ausführliche Maßtheorie von BOURBAKI [7] zur Verfügung.

Wir wollen jedoch von keiner der angeführten Fortsetzungsmethoden Gebrauch machen, da diese je nach dem Stetigkeitscharakter des Maßes μ unterschiedliche Integralkonstruktionen vorschreiben. Ziel dieses Paragraphen ist es vielmehr, eine einzige Fortsetzungsmethode, die für jedes Maß μ auf $(X, \mathcal{B})$ unabhängig von seiner Stetigkeit anwendbar ist, zu entwickeln. Letztere geht lediglich in die Definition 2.1 ein. In § 3 werden die so erhaltenen Ergebnisse mit denen der oben zitierten Integrationstheorien verglichen, wobei

⁺) Die Voraussetzung der Positivität von μ bedeutet in Betracht des Satzes 1.5 keinen Verlust an Allgemeinheit.

sich zeigt, daß diese Spezialfälle der hier entwickelten allgemeinen Fortsetzungsmethode sind.

Das Prinzip der Fortsetzung eines jeden Maßes $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ auf die Menge $\mathcal{L}^1(\mu)$ der μ -integrierbaren Funktionen ist das folgende: Man bestimme $\mathcal{L}^1(\mu)$ als den größten Teilraum des Vektorraums $\mathbb{R}^X$ aller reellen Funktionen auf X , auf den sich μ unter Berücksichtigung seiner Stetigkeitseigenschaft auf genau eine Weise positiv linear fortsetzen läßt.

Die erhaltenen Ergebnisse sind natürlich aufgrund der Definition 2.1 vom Stetigkeitscharakter von μ abhängig - die Methode selbst ist jedoch hiervon unabhängig.

Den Schlüssel zur Realisierung des angegebenen Fortsetzungsprinzips liefert das Theorem 2 in 1.6. Sei nämlich $\mathcal{R} = \mathcal{L}^1(\mu)$ der gesuchte maximale Teilraum von $\mathbb{R}^X$ und $\tilde{\mu}$ die eindeutige Fortsetzung von μ auf $\mathcal{R}$. Da $\mathcal{R}$ den Ring $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ enthält, ist offensichtlich die Bedingung (3) erfüllt und somit das Theorem 2 anwendbar. Demnach existiert ein $U_{\mathcal{R}}$ -Cauchyfilter $\mathcal{F}_{\mu}$ auf $\mathcal{E}_+$, der gegen $\tilde{\mu}$ konvergiert; d.h. aber n. Def. von $U_{\mathcal{R}}$: $\tilde{\mu}(f) = \lim_{\mathcal{F}_{\mu}} f$ für alle $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Das Fortsetzungsproblem ist somit äquivalent zu der Aufgabe, einen möglichst feinen Cauchyfilter $\mathcal{F}_{\mu}$ auf $\mathcal{E}_+$ mit μ als Adhärenzpunkt zu bestimmen. Hierzu dient die folgende Definition:

Definition 2.1: Sei μ ein positives Maß auf dem lokalbeschränkten Raum $(X, \mathcal{B})$. Eine reelle Funktion auf X heißt μ -Oberfunktion, wenn sie obere Einhüllende eines aufst.

filtr. Systems $H \subset \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ ist mit den folgenden Eigenschaften:

- (a1) H ist endlich für $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}} \setminus \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\sigma}$;
- (a2) H ist abzählbar für $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\sigma} \setminus \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\tau}$;
- (a3) H ist beliebig für $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\tau}$;
- (b) $\sup_{g \in H} \mu(g) < \infty$.

$\mathcal{U}^\mu$ bezeichne die Menge aller μ -Oberfunktionen.

Satz 2.1: Durch die Definition

$$\mu(h) := \sup \{ \mu(g) : g \leq h, g \in \mathcal{K}_B \} \quad (h \in \mathcal{U}^\mu)$$

wird das Maß μ eindeutig zu einem additiven und positiv homogenen Funktional auf $\mathcal{U}^\mu$ fortgesetzt.

Zum Beweis des Satz 2.1 dient folgendes Lemma:

Lemma 1: Sei H ein aufst. filtr. System in $\mathcal{K}_B$ wie in Def. 2.1 mit $\sup H = h \in \mathcal{U}^\mu$. Dann gilt:

$$\mu(h) = \sup_{g \in H} \mu(g).$$

Beweis (nach JACOBS [19]): Sei $g_0 \in \mathcal{K}_B$ mit $g_0 \leq \sup_{g \in H} g$.

Dann ist das System $\{g_0 - (g_0 \wedge g)\}_{g \in H}$ abst. filtr. und konvergiert punktweise auf X gegen Null. Unter der jeweiligen Stetigkeitsvoraussetzung von μ folgt:

$$\inf_{g \in H} \mu(g_0 - (g_0 \wedge g)) = 0$$

und somit

$$\begin{aligned} \sup_{g \in H} \mu(g) &\geq \sup \mu(g \wedge g_0) = \sup (\mu(g_0) - \mu(g_0 - (g_0 \wedge g))) \\ &= \mu(g_0) - \inf \mu(g_0 - (g_0 \wedge g)) \\ &= \mu(g_0). \end{aligned}$$

Daraus folgt aber:

$$\sup_{g \in H} \mu(g) \geq \sup_{g_0 \leq h} \mu(g_0) =: \mu(h).$$

Aus $H \subset \{g \in \mathcal{K}_B : g \leq h\}$ folgt " $\leq$ " und damit die Behauptung. $\square$

Beweis des Satzes 2.1: Aus der Definition von μ folgt unmittelbar: $\mu(\alpha h) = \alpha \mu(h)$ für jedes $\alpha > 0$ und $h \in \mathcal{U}^\mu$.

Seien also $h_1, h_2 \in \mathcal{U}^\mu$ und H_1, H_2 aufst. filtr. Systeme in

$\mathcal{K}_B$ mit h_1 bzw. h_2 als obere Einhüllende. Dann ist auch $H_1 + H_2$ ein μ -zulässiges aufst. filtr. System, das gegen $h_1 + h_2 \in \mathcal{U}^*$ konvergiert. Aufgrund des Lemmas 1 und der Linearität von μ auf $\mathcal{K}_B$ folgt daher:

$$\begin{aligned}\mu(h_1 + h_2) &= \sup_{g \in H_1 + H_2} \mu(g) = \sup_{g: g \in H_1} \{ \mu(g_1) + \mu(g_2) \} \\ &= \sup_{g_1 \in H_1} \mu(g_1) + \sup_{g_2 \in H_2} \mu(g_2) = \mu(h_1) + \mu(h_2). \quad \checkmark\end{aligned}$$

Satz 2.2: Die Mengen der Form

$$M_{h, \varepsilon} := \{ v \in \mathcal{E}_+ : |\mu(h) - v(h)| < \varepsilon \} \quad (h \in \mathcal{U}^*, \varepsilon > 0)$$

bilden eine Filtersubbasis auf $\mathcal{E}_+$.

Beweis: Man betrachte den Vektorraum $\mathcal{R} = \mathcal{U}^* - \mathcal{U}^*$ und die positive Linearform $\tilde{\mu}$ auf $\mathcal{R}$, die durch $\tilde{\mu}(f) = \mu(f^+) - \mu(f^-)$ ($f \in \mathcal{R}$) gegeben ist. N. Theor. 2 existiert genau ein minimaler $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$ -Cauchyfilter $\mathcal{F}_{\tilde{\mu}}$ auf $\mathcal{E}_+$, der gegen $\tilde{\mu}$ konvergiert, nämlich die Spur des Umgebungsfilters von $\tilde{\mu}$ in $\mathcal{R}^*$. Das bedeutet aber, daß die Mengen

$$M_{f_1, \dots, f_n, \varepsilon} = \{ v \in \mathcal{E}_+ : |\tilde{\mu}(f_i) - v(f_i)| < \varepsilon, i=1 \dots n \}$$

mit $f_i \in \mathcal{R}$ eine Basis von $\mathcal{F}_{\tilde{\mu}}$ bilden. Insbesondere gehören also die Mengen $M_{h, \varepsilon}$ zu $\mathcal{F}_{\tilde{\mu}}$, so daß ihre endlichen Durchschnitte nicht leer sein können. $\checkmark$

$\mathcal{F}_{\mu}$ bezeichne fortan den von dem System $(M_{h, \varepsilon})$ erzeugten Filter auf $\mathcal{E}_+$, d.h. den Filter, für den die Mengen

$$\begin{aligned}M_{h_1, \dots, h_n, \varepsilon} &= \{ v \in \mathcal{E}_+ : |\mu(h_i) - v(h_i)| < \varepsilon, i=1 \dots n \} \\ &\quad (h_i \in \mathcal{U}^*, \varepsilon > 0)\end{aligned}$$

eine Basis bilden.

Die Lösung des Fortsetzungsproblems liefert nun das folgende Theorem, das gleichzeitig aufgrund der Aussage (iii) die Beziehung zu den eingangs erwähnten Integrationstheorien herstellt.

Theorem 3: $\mathcal{L}$ sei ein Vektorraum reeller Funktionen auf X , der alle μ -Oberfunktionen enthält. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $\mu \upharpoonright \mathcal{U}^\mu$ kann auf genau eine Weise zu einer positiven Linearform auf $\mathcal{L}$ fortgesetzt werden.
- (ii) $L(f) = \inf_{f \leq h \in \mathcal{U}^\mu} \mu(h)$ ($f \in \mathcal{L}$) ist die einzige positive Linearform auf $\mathcal{L}$ mit $\text{Rest}_{\mathcal{U}^\mu} L = \mu$.
- (iii) $\forall f \in \mathcal{L} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists g, h \in \mathcal{U}^\mu : -g \leq f \leq h \wedge \mu(g+h) < \varepsilon$.
- (iv) Der Bildfilter $f(\mathcal{F}_\mu)$ ist konvergent für alle $f \in \mathcal{L}$.
- (v) $\mathcal{F}_\mu$ ist ein Cauchyfilter auf $\mathcal{E}_+$ bzgl. $U_{\mathcal{L}}$.

Beweis: (i) $\longrightarrow$ (ii): Durch

$$p(f) := \inf_{f \leq h \in \mathcal{U}^\mu} \mu(h) \quad (f \in \mathcal{L})$$

ist eine numerische, isotone, verallgemeinerte Halbnorm auf $\mathcal{L}$ definiert. Bezeichnet L die n. Vor. existierende einzige positive lineare Fortsetzung von μ auf $\mathcal{L}$, so gilt offenbar $L \leq p$ auf $\mathcal{L}$. Zu zeigen ist: $L = p$ auf $\mathcal{L}$.

Wir zeigen zunächst: $L = p$ auf $M = \mathcal{U}^\mu - \mathcal{U}^\mu$. Für jedes $g \in \mathcal{U}^\mu$ gilt nämlich:

$$-p(-g) = \sup_{\substack{h \leq g \\ h \in -\mathcal{U}^\mu}} \mu(h) \geq \sup_{\substack{h \leq g \\ h \in \mathcal{K}_\mathbb{R}}} \mu(h) = \mu(g) .$$

Hieraus folgt für jedes $g = g_1 - g_2 \in M$ mit $g_i \in \mathcal{U}^\mu$:

$$p(g) \leq p(g_1) + p(-g_2) \leq \mu(g_1) - \mu(g_2) = L(g) .$$

Angenommen es existiere ein $f_0 \in \mathcal{L} \setminus M$ mit $L(f_0) < p(f_0)$.

Wir zeigen, daß hieraus die Existenz einer positiven Linearform $\tilde{L} \neq L$ auf $\mathcal{L}$ folgt, die auf M mit L übereinstimmt und somit ebenfalls μ fortsetzt im Widerspruch zur Voraussetzung.

Nach dem Zornschen Lemma kann o.B.d.A. angenommen werden, daß M eine Hyperebene in $\mathcal{L}$ ist, d.h. $\mathcal{L} = \{ f = g + \alpha f_0 : g \in M, \alpha \in \mathbb{R} \}$.

Sei nun γ eine reelle Zahl mit $L(f_0) < \gamma < p(f_0)$. Dann ist offenbar $\tilde{L}(f) := L(g) + \alpha \cdot \gamma$ eine Linearform auf $\mathcal{L}$, die auf M mit L übereinstimmt. Sei nun $f = g + \alpha f_0 \geq 0$. Dann folgt für alle $\alpha \geq 0$:

$$\tilde{L}(f) = L(g) + \alpha \cdot \gamma > L(g) + \alpha \cdot L(f_0) = L(f) \geq 0 .$$

Für jedes $\alpha < 0$ folgt aus $f_0 \leq -\alpha^{-1}g \in M$:

$$\gamma < p(f_0) \leq p(-\alpha^{-1}g) = L(-\alpha^{-1}g) = -\alpha^{-1}L(g)$$

und somit

$$\tilde{L}(f) = L(g) + \alpha \cdot \gamma > 0 .$$

Folglich ist $\tilde{L}$ eine positive Linearform auf $\mathcal{L}$ mit

$$\tilde{L}(f_0) = \gamma \neq L(f_0) .$$

(ii) $\longrightarrow$ (iii): Sei L die positive lineare Fortsetzung von μ auf $\mathcal{L}$. N. Vor. existiert zu jedem $f \in \mathcal{L}$ und $\varepsilon > 0$ ein $f \leq h \in \mathcal{U}^\mu$ mit $\mu(h) - L(f) < \varepsilon/2$. Der Rest der Behauptung folgt aus:

$$L(f) = -L(-f) = - \inf_{-f \leq g \in \mathcal{U}^\mu} \mu(g) = \sup_{-g \leq f} \mu(-g) .$$

(iii) $\longrightarrow$ (iv): Zu beliebigem $f \in \mathcal{L}$ und $\varepsilon > 0$ seien die Funktionen $g, h \in \mathcal{U}^\mu$ wie in (iii) definiert. Dann gilt n. Vor. sowie nach Definition von $\tilde{\mathcal{F}}_\mu$:

Definition 2.2: $\mathcal{L}^1(\mu)$ heißt der Raum der μ -integrierbaren reellen Funktionen auf X . Für jedes $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ heißt

$$\int f \, d\mu := \lim_{V, \mathcal{F}_\mu} v(f) = \lim_{\mathcal{F}_\mu} f$$

das Integral von f (bzgl. μ) .

Satz 2.3: $\mathcal{L}^1(\mu)$ ist ein Vektorverband.

Beweis: Dies folgt aus der Tatsache, daß mit jedem $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ auch die Funktion $|f|$ gleichmäßig stetig ist auf $\mathcal{E}_+$ bzgl. $U_{\mathcal{F}_\mu}$. Ist somit $f \in \mathcal{L}^1$ und damit n. Theor. 3 (iv) $f(\mathcal{F}_\mu)$ ein Cauchy-filter auf $\mathbb{R}$, so auch $|f|(\mathcal{F}_\mu)$. $_$

2.2 Integrierbare und meßbare Mengen

Sei $\mu \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{B})$ und $\mathcal{L}^1(\mu)$ der Vektorraum der reellen μ -integrierbaren Funktionen auf X .

Definition 2.3: Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt μ -integrierbar, wenn ihre charakteristische Funktion 1_A μ -integrierbar ist.

$\mathcal{I}_\mu$ bezeichne das System aller μ -integrierbaren Teilmengen von X .

Satz 2.4: $\mathcal{I}_\mu$ ist ein Ring. Durch

$$\mu(A) := \int 1_A \, d\mu$$

wird ein (im Sinne von LOMIS [25]) vollständiger Inhalt auf $\mathcal{I}_\mu$ definiert.

Beweis: Die Ringeigenschaft von $\mathcal{I}_\mu$ folgt aus den Beziehungen

$$1_{\bigcup_{K=1}^n A_K} = \sup_K 1_{A_K}$$

sowie

$$1_{A \setminus B} = (1_A - 1_B)^+$$

und damit aus Satz 2.3. Ferner gilt für disjunkte Mengen

$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{G}_\mu$:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \int 1_{\sum_k A_k} d\mu = \sum_k \int 1_{A_k} d\mu = \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

Sei schließlich $M \subset X$, derart daß gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A, B \in \mathcal{G}_\mu : A \subset M \subset B \wedge \mu(B \setminus A) < \varepsilon.$$

N. Theor. 3 (iii) existieren Funktionen $g, h \in \mathcal{U}^\mu$:

$-g \leq 1_A \leq 1_M \leq 1_B \leq h$ sowie $\mu(g + h) < 3\varepsilon$. Somit gehört 1_M zu $\mathcal{L}'(\mu)$. $\square$

Nach HAUPT-PAUC [17] heißt ein Inhalt μ auf einem Ring $\mathcal{Q}$ von Teilmengen eines lokalkompakten Raumes X an X adaptiert, wenn folgendes gilt:

- (a) Jedes $Q \in \mathcal{Q}$ ist relativ kompakt;
- (b) $\mathcal{Q}$ enthält eine offene Basis von X ;
- (c) Mit Q gehören auch $\bar{Q}$ und $\overset{\circ}{Q}$ zu $\mathcal{Q}$ und es gilt:
 $\mu(Q) = \mu(\bar{Q}) = \mu(\overset{\circ}{Q})$;
- (d) $\forall Q \in \mathcal{Q} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ off. } U \in \mathcal{Q} : Q \subset U \wedge \mu(U \setminus Q) < \varepsilon.$

Es liegt nahe, diesen Begriff auf Inhalte auf lokalbeschränkten Räume zu übertragen und einen Inhalt $\mu|_{\mathcal{Q}}$ an $(X, \mathcal{B})$ adaptiert zu nennen, wenn er die Eigenschaften:

- (a') Jedes $Q \in \mathcal{Q}$ ist beschränkt (bzgl. $\mathcal{B}$)

sowie (b), (c) und (d) besitzt. Dann gilt:

Satz 2.5: Ist das Maß $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ unstetig, so ist der Inhalt $\mu|_{\mathcal{G}_\mu}$ an $(X, \mathcal{B})$ adaptiert.

Beweis: Der Beweis verläuft analog zu Satz 7 in [3], wenn man überall den $\mathcal{R}$ durch den Ring $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ und "relativ-kompakt" durch

"beschränkt" ersetzt. $_$

$\mathcal{Z}_B$ bezeichne das System aller beschränkten z -Mengen von (X, B) ;

$\mathcal{A}_B$ bezeichne das System aller abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen von (X, B) .

Satz 2.6: (i) Für jedes $\mu \in \mathcal{M}_B^G$ gilt: $\mathcal{Z}_B \subset \mathcal{D}_\mu$

(ii) Für jedes $\mu \in \mathcal{M}_B^T$ gilt: $\mathcal{A}_B \subset \mathcal{D}_\mu$

Beweis: (i) Sei $Z = Z(g) \in \mathcal{Z}_B$. Wegen $Z = \bigcap_n [|g| \leq n^{-1}]$ und Axiom (B3) existiert eine aufsteigende Folge $(g_n) \subset \mathcal{K}_B$ mit $-1_Z = \sup_n g_n$. Wegen $\sup_n \mu(g_n) \leq 0$ ist -1_Z eine μ -Oberfunktion. Somit gilt $1_Z \in \mathcal{L}^+(\mu)$.

(ii) Für jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge A von (X, B) gilt

$$-1_A = \sup \{ g \in \mathcal{K}_B : g \leq -1_A \} \in \mathcal{U}^\mu . _$$

Die Definition 1.6 in Abschnitt 1.4 legt folgende Klassifizierung der Inhalte $\mu|_{\mathcal{D}_\mu}$ nach Additivitätseigenschaften nahe:

Definition 2.4: Der Inhalt $\mu|_{\mathcal{D}_\mu}$ heiße:

(a) σ -additiv $\xleftrightarrow[\text{df.}]{} \text{Für jede fallende Folge } (Z_n) \subset \mathcal{Z}_B \text{ mit } Z_n \searrow \emptyset \text{ gilt } \mu(Z_n) \rightarrow 0 .$

(b) τ -additiv $\xleftrightarrow[\text{df.}]{} \text{Für jedes abst. filtr. System } (Z_\alpha) \subset \mathcal{Z}_B \text{ mit } (Z_\alpha) \searrow \emptyset \text{ gilt } \mu(Z_\alpha) \rightarrow 0$

(c) kompakt $\xleftrightarrow[\text{df.}]{} \forall B \in B \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ kp. } K \subset X : \mu(B \setminus K) \leq \varepsilon .$

Zwischen der Stetigkeit des Maßes μ auf (X, B) und der Additivität des zugehörigen Inhalts $\mu|_{\mathcal{D}_\mu}$ besteht folgender Zusammenhang:

Satz 2.7: Sei $\mu \in \mathcal{M}(X, B)$ und $\mu|_{\mathcal{D}_\mu}$ der aus μ abgeleitete Inhalt. Dann gilt:

- (i) Das Maß μ ist σ -stetig $\iff \mu|_{\mathcal{G}_\mu}$ ist σ -additiv .
 (ii) Das Maß μ ist τ -stetig $\iff \mu|_{\mathcal{G}_\mu}$ ist τ -additiv .
 (iii) Das Maß μ ist straff $\iff \mu|_{\mathcal{G}_\mu}$ ist kompakt .

Beweis: Wir beweisen zunächst (ii). Sei $(Z_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein abst. filtr. System in $\mathcal{Z}_B$ mit $Z_\alpha \searrow \emptyset$. Dann ist

$\mathcal{D} := \{ g \in \mathcal{K}_B : 0 \leq g \leq 1 \wedge g|_{Z_\alpha} = 1 \text{ für ein } \alpha \in A \}$
 ein abst. filtr. System $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in $\mathcal{K}_B$ mit $g_\lambda \searrow 0$. Somit existiert n. Vor. zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\lambda_0 \in \Lambda$ mit $\mu(g_{\lambda_0}) < \varepsilon$. Nach Konstruktion von $\mathcal{D}$ gilt ferner $g_{\lambda_0}|_{Z_{\alpha_0}} = 1$ für ein $\alpha_0 \in A$. Daraus folgt aber: $\mu(Z_{\alpha_0}) \leq \mu(g_{\lambda_0}) < \varepsilon \quad \forall \alpha_0 < \alpha$. Sei umgekehrt $(g_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein abst. filtr. System in $\mathcal{K}_B$, das punktweise gegen Null strebt. O.B.d.A. sei $(g_\alpha) \subset \sum_B$ für ein $B \in \mathcal{B}$. Dann ist für jedes $\varepsilon > 0$ $Z_\alpha := [g_\alpha \geq \varepsilon]$ ($\alpha \in A$) ein abst. filtr. System in $\mathcal{Z}_B$ mit $Z_\alpha \searrow \emptyset$. Also gilt n. Vor. $\mu(Z_\alpha) \rightarrow 0$. Nach Axiom (B3) existiert ein $g_0 \in \mathcal{K}_B$ mit $T_{g_0} \subset E(g_0)$ für alle $\alpha \in A$. Somit folgt:

$$\mu(g_\alpha) \leq \mu(1_{Z_\alpha}) + \mu(\varepsilon \cdot 1_{T_{g_0}}) = \mu(Z_\alpha) + \varepsilon \cdot \mu(T_{g_0}) .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist hiermit (ii) bewiesen.

Da der Beweis auch für abzählbare gefilterte Systeme gilt, ist damit (i) ebenfalls gezeigt.

Sei nun $\mu \in \mathcal{M}_B^+$ und $B_1 \in \mathcal{B}$. Nach Axiom (B3) existiert ein $B_j \in \mathcal{B}$ mit $B_1 \subset \overset{\circ}{B}_j$. Aus der $\mathcal{T}_{B_j}^c$ -Stetigkeit von μ auf $\sum_{B_j}$ folgt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ kp. } K \subset B_j \quad \forall g \in \sum_{B_j} : g|_K = 0 \rightsquigarrow |\mu(g)| < \varepsilon .$$

Hieraus folgt:

$$\mu(B_1 \setminus K) \leq \mu(\overset{\circ}{B}_j \setminus K) = \sup \{ \mu(g) : g \in \sum_{B_j}, g|_K = 0 \} \leq \varepsilon .$$

Sei umgekehrt $(g_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein System in $\sum_B$, das gleichmäßig auf den

kompakten Teilmengen von B gegen Null strebt. Dann existieren n. Vor. zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge K in X sowie ein $\alpha_0 \in A$, derart daß gilt $\mu(B \setminus K) < \varepsilon$ und $|\varepsilon_\alpha| \leq \varepsilon \cdot 1_{B \cap K} + 1_{B \setminus K}$ für alle $\alpha_0 < \alpha$. Hieraus folgt n. Kor. 1 zu Satz 1.8:

$$|\mu(\varepsilon_\alpha)| \leq \varepsilon \cdot \mu(B \cap K) + \mu(B \setminus K) \leq \varepsilon (\mu(B) + 1) .$$

Hiermit ist auch (iii) bewiesen. $\square$

Ist $(X, \mathcal{B})$ beschränkt, so erhält man aus Satz 2.7 die entsprechenden Sätze 20, 24 und 29 von VARADARAJAN [35].

Je nach Additivität besitzt der Inhalt $\mu|_{\mathcal{F}_\mu}$ folgende Regularitätseigenschaften:

Satz 2.8: Für jede Menge $Q \in \mathcal{F}_\mu$ gilt:

- (i) $\mu(Q) = \sup \{ \mu(Z) : Z \subset Q, Z \in \mathcal{F}_\mathcal{B} \}$, falls μ strikt⁺ σ -additiv ist.
- (ii) $\mu(Q) = \sup \{ \mu(A) : A \subset Q, A \in \mathcal{A}_\mathcal{B} \}$, falls μ τ -additiv ist.
- (iii) $\mu(Q) = \sup \{ \mu(K) : K \subset Q, K \text{ kp.} \}$, falls μ kompakt ist.

Beweis: (i) Zu jedem $Q \in \mathcal{F}_\mu$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert n.

Theor. 3 (iii) eine Funktion $g \in \mathcal{U}^\mu$ mit $g \leq 1_Q$ und $\mu(1_Q - g) < \varepsilon$.

N. Def. von $\mathcal{U}^\mu$ ist g das Infimum einer absteigenden Folge

$(g_n) \subset \mathcal{K}_\mathcal{B}$. Sei nun δ eine beliebige positive Zahl. Dann ist

die Menge $Z := [g \geq \delta] = \bigcap_n [g_n \geq \delta]$ als Durchschnitt von abzählbar vielen beschränkten z -Mengen ebenfalls eine beschränkte z -Menge. Aus $g \leq 1_Z + \delta \cdot 1_Q$ folgt

$$\mu(Q) < \mu(g) + \varepsilon \leq \mu(Z) + \delta \cdot \mu(Q) + \varepsilon .$$

Da $\delta > 0$ beliebig war, folgt daraus die Behauptung.

(ii) Der Beweis verläuft analog wie in (i). Die Menge

$$A := [h \geq \delta] = \bigcap_\alpha [g_\alpha \geq \delta] \text{ leistet das Verlangte.}$$

(iii) Nach (ii) existiert zu $Q \in \mathcal{F}_\mu$ und $\varepsilon > 0$ eine abgeschlos-

⁺ Der Inhalt μ heißt strikt σ -additiv, falls μ σ -additiv, aber nicht τ -additiv ist.

sene und beschränkte Menge $A \subset Q$ mit $\mu(Q \setminus A) < \varepsilon$. A ist in einem $B \in \mathcal{B}$ enthalten. N. Ver. existiert eine kompakte Menge $K_B \subset X$ mit $\mu(B \setminus K_B) \leq \varepsilon$. Für die kompakte Menge $K = K_B \cap A$ folgt somit: $K \subset A \subset Q$ sowie

$$\mu(Q \setminus K) < \mu(A \setminus K) + \varepsilon \leq \mu(B \setminus K_B) + \varepsilon = 2\varepsilon. \quad _$$

Satz 2.9: Ist $\mu \in \mathcal{M}^\sigma(X, \mathcal{B})$, so ist der Inhalt $\mu|_{\mathcal{F}_\mu}$ ein Prämaß [5] und kann somit auf genau eine Weise zu einem (vollständigen) Maß auf den von $\mathcal{F}_\mu$ erzeugten σ -Ring $\mathcal{L}_\mu$ fortgesetzt werden.

Beweis: Nach [5], S. 19, ist μ genau dann ein Prämaß, wenn gilt: (5) Für jede absteigende Folge $(Q_n) \subset \mathcal{F}_\mu$ mit $Q_n \searrow \emptyset$ gilt $\mu(Q_n) \rightarrow 0$. Ist $\mu \in \mathcal{M}^\sigma, \mathcal{M}^\tau$, so folgt (5) aus den Sätzen 2.7 (i) und 2.8 (i). Ist $\mu \in \mathcal{M}^\tau$, so gilt n. Satz 2.7(ii) $\mu(Z_\alpha) \rightarrow 0$ für jedes System $(Z_\alpha) \subset \mathcal{I}_\mathcal{B}$ mit $Z_\alpha \searrow \emptyset$. Da jede Menge aus $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ Durchschnitt von beschränkten z -Mengen ist, folgt daraus $\mu(A_n) \rightarrow 0$ für jede Folge $(A_n) \subset \mathcal{A}_\mathcal{B}$ mit $A_n \searrow \emptyset$. Die Bedingung (5) folgt daher in diesem Fall aus Satz 2.8 (ii). Daß ein endliches Prämaß auf einem Ring $\mathcal{F}$ auf genau eine Weise zu einem Maß auf den von $\mathcal{F}$ erzeugten σ -Ring fortgesetzt werden kann, ist eine wohlbekannte Tatsache der allgemeinen Maßtheorie (siehe z.B. [5], [16], [19]).

Diese Fortsetzung kann aber auch unabhängig davon mit dem in 2.3 eingeführten äußeren Maß μ^* durchgeführt werden, d.h. durch

$$\mu(B) := \mu^*(1_B) = \limsup_{\mathcal{F}_\mu} 1_B \quad (B \in \mathcal{L}_\mu)$$

wird das Prämaß $\mu|_{\mathcal{F}_\mu}$ eindeutig zu einem Maß auf $\mathcal{L}_\mu$ fortgesetzt.

Die Vollständigkeit von μ schließlich folgt aus Theor. 3 (iii).

Ist nämlich $A \subset B \in \mathcal{L}_\mu$ mit $\mu(B) = 0$, so existiert zu jedem

$\varepsilon > 0$ ein $h \in \mathcal{U}^H$ mit $0 \leq 1_A \leq 1_B \leq h$ und $\mu(h) < \varepsilon$. Somit folgt $1_A \in \mathcal{L}^A(\mu)$ und damit $A \in \mathcal{L}_\mu$. $\square$

Definition 2.5 (GOULD [15]):

- (i) Der von dem System $\mathcal{Z}_B$ aller beschränkten z -Mengen von (X, B) erzeugte σ -Ring $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(B)$ heißt das System der Baireschen Mengen von (X, B) .
- (ii) Der von dem System $\mathcal{A}_B$ aller abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen von (X, B) erzeugte σ -Ring $\mathcal{L} = \mathcal{L}(B)$ heißt das System der Borelschen Mengen von (X, B) .

Satz 2,10: Zu jedem $\mu \in \mathcal{M}^b(X, \mathcal{B})$ gehört ein vollständiger Maßraum $(X, \mathcal{L}_\mu, \mu)$ mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Ist $\mu \in \mathcal{M}^{\delta} \setminus \mathcal{M}^{\tau}$, so enthält $\mathcal{L}_{\mu}$ die Baireschen Mengen von $(X, \mathcal{B})$, und μ ist regulär auf $\mathcal{L}_{\mu}$ bzgl. innerer Approximation mit beschränkten z -Mengen.
- (b) Ist $\mu \in \mathcal{M}^{\tau}$, so enthält $\mathcal{L}_{\mu}$ die Borelschen Mengen von $(X, \mathcal{B})$, und μ ist regulär auf $\mathcal{L}_{\mu}$ bzgl. innerer Approximation mit abgeschlossenen und beschränkten Mengen.
- (c) Ist $\mu \in \mathcal{M}^t$, so enthält $\mathcal{L}_{\mu}$ die Borelschen Mengen von $(X, \mathcal{B})$, und μ ist regulär auf $\mathcal{L}_{\mu}$ bzgl. innerer Approximation mit kompakten Mengen.

Beweis: Der jeweils erste Teil der Behauptungen folgt unmittelbar aus den Sätzen 2.6 und 2.9 sowie aus Def. 2.5 .

Die Regularitätseigenschaften folgen aus folgender Überle-

Angabe: Das System aller Teilmengen von $\mathcal{L}_\mu$, deren Maß wie angegeben approximierbar ist, bildet einen σ -Ring $\mathcal{A}$, der n.

Satz 2.8 jeweils den Ring $\mathcal{O}_\mu$ enthält. Da $\mathcal{O}_\mu$ aber $\mathcal{L}_\mu$ erzeugt, ist $\mathcal{O}_1 = \mathcal{L}_\mu$. $\square$

Der Satz 2.10 gestattet nun, folgende in der Maßtheorie wohl-
bekannte Sprechweise einzuführen: Ist $A(x)$ eine Aussage für
alle $x \in X$, so ist die Aussage $A(x)$ μ -fast überall (μ -f.ü.)
äquivalent zu $\mu \{ x \in X : \neg A(x) \} = 0$. Somit können wir
i.f. von Konvergenz, Definiertheit, Gleichheit etc. μ -fast
überall auf X sprechen. Insbesondere heißen zwei μ -f.ü. auf
 X definierte Funktionen f, g μ -äquivalent, wenn gilt
 $f(x) = g(x)$ μ -f.ü. Mit diesem Begriff läßt sich die Klasse
der μ -integrierbaren Funktionen wie folgt erweitern:

Definition 2.6: Eine numerische μ -f.ü. auf X definierte
Funktion heißt μ -integrierbar, wenn sie einer Funktion aus
 $\mathcal{L}^1(\mu)$ μ -äquivalent ist.

Von dieser Möglichkeit, die Klasse der integrierbaren Funk-
tionen zu erweitern, werden wir jedoch i.f. keinen Gebrauch
machen, sondern uns auf die Betrachtung reeller überall auf
 X definierter Funktionen beschränken.

Bemerkung: Die Bestimmung von $\mathcal{L}_\mu$ als " μ -meßbaren" Mengen den
von $(X, \mathcal{B})$ entspricht dem Standpunkt von HALMOS zur Meßbar-
keit in lokalkompakten Räumen [16], § 51. In der Tat fallen
die Definitionen der Baireschen und Borelschen Mengen gem.
Def. 2.5 mit denen von HALMOS zusammen, wenn $(X, \mathcal{B})$ lokal-
kompakt ist.

In der HALMOSschen Definition der Meßbarkeit ist jedoch X
bzw. die Konstante 1 i. allg. nicht meßbar, während dies
bei der Definition der Meßbarkeit nach BOURBAKI [7] stets
der Fall ist. Will man den BOURBAKIschen Meßbarkeitsbegriff
in $(X, \mathcal{B})$ einführen, so sind $\mathcal{L}_\mu$ und μ wie folgt zu definieren:

$$\mathcal{L}_\mu := \{ M \subset X : M \cap S \in \mathcal{L}_\mu \quad \forall S \in \mathcal{S}_\mu \} ;$$

$$\mu(M) := \sup \{ \mu(S) : S \subset M, S \in \mathcal{S}_\mu \} .$$

M.a.W.: Man ersetze in diesem Fall in Satz 2.9 die Fortsetzung des Inhalts $\mu|_{\mathcal{Y}_\mu}$ mit Hilfe des äußeren Maßes μ^* durch die "wesentliche" Fortsetzung $\bar{\mu}^*$ im Sinnes von COURRÈGE [9], chap. 2 .

2.3 Äußeres und inneres Maß. N_p -Normen

Im Gegensatz zu den Fortsetzungsmethoden von STONE [33] und BOURBAKI [7] wurde die Fortsetzung des Maßes μ in 2.1 ohne Verwendung eines äußeren Maßes durchgeführt. Die Bestimmung der $\mathcal{L}^1$ -Räume (und damit der $\mathcal{L}^p$ -Räume - siehe Def. 2.8) sowie der integrierbaren und meßbaren Mengen geschah vielmehr alleine mit Hilfe des in 2.1 definierten Filters $\mathcal{F}_\mu$.

Man kann den Filter $\mathcal{F}_\mu$ aber auch dazu verwenden, um auf natürliche Weise ein äußeres (und analog ein inneres) Maß auf der Menge aller reellen Funktionen auf X zu definieren. Mit Hilfe dieses äußeren Maßes können dann die Fortsetzungsmethoden von STONE und BOURBAKI angewendet werden. Es erhebt sich die Frage, wie sich die auf diese Weise erhaltenen Ergebnisse zu den in den beiden vorigen Abschnitten ohne Verwendung eines äußeren Maßes gewonnenen Resultaten verhalten. Es wird sich zeigen, daß beide übereinstimmen - und zwar für jedes Maß $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ unabhängig von seinem Stetigkeitscharakter.

I.f. sei μ ein beliebiges Maß auf $(X, \mathcal{B})$. ↓ positives

Definition 2.7: Für jede reelle Funktion f auf X heiße:

$$(a) \mu^*(f) = \int^* f d\mu := \limsup_{\mathcal{F}_\mu} f$$

das äußere Maß oder das Oberintegral von f ;

$$(b) \mu_*(f) = \int_* f d\mu := \liminf_{\mathcal{F}_\mu} f$$

das innere Maß oder das Unterintegral von f .

Aus der obigen Definition folgt unmittelbar:

Satz 2.11: Eine reelle Funktion f auf X ist genau dann integrierbar, wenn das Oberintegral und das Unterintegral von f übereinstimmen und endlich sind.

$$(\xi) \quad \mu^*(f \vee g) + \mu^*(f \wedge g) \leq \mu^*(f) + \mu^*(g)$$

Aufgrund der Eigenschaften (β) , (γ) und (δ) ist μ^* auf $\mathbb{R}^X$ monoton, positiv homogen und konvex. Somit gelten nach [7], p. 11-12, die folgenden Ungleichungen von MINKOWSKI und HÖLDER :

(η) Für jede reelle Zahl $p \geq 1$ gilt:

$$(\mu^*((f+g)^p))^{1/p} \leq (\mu^*(|f|^p))^{1/p} + (\mu^*(|g|^p))^{1/p}$$

(ζ) Für reelle Zahlen $p, q \geq 1$ mit $1/p + 1/q = 1$ gilt:

$$\mu^*(|f \cdot g|) \leq (\mu^*(|f|^p))^{1/p} \cdot (\mu^*(|g|^q))^{1/q}$$

Ist die Funktion g μ -integrierbar, so gilt zusätzlich:

$$(\iota) \quad \mu^*(f + g) = \mu^*(f) + \mu(g)$$

$$(\kappa) \quad \mu^*(f + g) = \mu^*(f \vee g) + \mu^*(f \wedge g)$$

Für jede reelle Zahl $p \geq 1$ und jede reelle Funktion f auf X sei

$$N_p^\mu(f) := (\mu^*(|f|^p))^{1/p}.$$

$\mathcal{F}^p(\mu)$ bezeichne die Menge aller reellen Funktionen f auf X mit $N_p^\mu(f) < \infty$. Wegen der Eigenschaften (γ) , (δ) und (η) von μ^* ist N_p^μ eine Halbnorm auf dem linearen Raum $\mathcal{F}^p(\mu)$. Mit $\mathcal{F}^p(\mu)$ wird i.f. stets der lokalkonvexe Raum $\mathcal{F}^p$ versehen mit der N_p -Halbnorm bezeichnet. Die Topologie von $\mathcal{F}^p$ heißt nach [7] auch die "Topologie der Konvergenz im p -ten Mittel". Wegen der Ringeigenschaft von $\mathcal{K}_B$ ist offensichtlich für jedes $\mu \in \mathcal{M}_B$ und jedes $1 \leq p < \infty$ $\mathcal{K}_B$ in $\mathcal{F}^p(\mu)$ enthalten und somit ein lokalkonvexer Teilraum von $\mathcal{F}^p(\mu)$.

Satz 2.12: Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf $\mathcal{F}^p(\mu)$, der μ -f.ü. auf X gleichmäßig gegen die reelle Funktion f_0 konvergiert. Ferner existiere ein $B \in \mathcal{B}$ und ein $M_0 \in \mathcal{F}$, derart daß für alle

$f \in M_0$ gilt $\mu(B \setminus T_f) = 0$. Dann gehört f_0 zu $\mathcal{F}^p(\mu)$ und $\mathcal{F}$ konvergiert im p -ten Mittel gegen f_0 .

Beweis: Nach Axiom (B3) existiert ein $g \in \mathcal{K}_B$ mit $B \subset E(g)$.

N. Vor. existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $M_\varepsilon \in \mathcal{F}$ mit $|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon$ μ -f.ü. für alle $f \in M_\varepsilon$. Somit gilt für alle $f \in M_\varepsilon \cap M_0$:

$$|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon \cdot g(x) \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Daraus folgt aber: $N_p(f - f_0) \leq \varepsilon \cdot N_p(g)$. Wegen $\mathcal{K}_B \subset \mathcal{F}^p(\mu)$ ist $N_p(g)$ endlich, womit die Behauptung bewiesen ist. $_$

2.4 Die $\mathcal{L}^p$ -Räume ($1 \leq p < \infty$)

Definition 2.8: Eine numerische μ -f.ü. auf X definierte Funktion heißt p -fach μ -integrierbar ($1 \leq p < \infty$), wenn die Funktion $|f|^{p-1} \cdot f$ μ -integrierbar ist.

$\mathcal{L}^p(\mu)$ bezeichne den Vektorraum aller reellen und auf ganz X definierten p -fach μ -integrierbaren Funktionen. Offen-sichtlich gilt:

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \{ f \in \mathbb{R}^X : |f|^{p-1} \cdot f \in \mathcal{L}^1(\mu) \}.$$

Da μ^* auf $\mathcal{L}^1$ endlich ist, ist $\mathcal{L}^p$ offenbar ein lokalkonvexer Teilraum von $\mathcal{F}^p(\mu)$. L^p bezeichne den $\mathcal{L}^p$ zugeordneten nor-mierten Raum, d.h. $L^p := \mathcal{L}^p / \mathcal{N}^p$ mit $\mathcal{N}^p = \{ f \in \mathcal{L}^p : N_p(f) = 0 \}$.

Satz 2.13: Für jedes $\mu \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{B})$ und jede reelle Zahl $p \geq 1$ bezeichne $h_p^\mu \mathcal{K}_B$ den Abschluß von $\mathcal{K}_B$ in dem lokalkonvexen Raum $\mathcal{F}^p(\mu)$. Für jede positive reelle Funktion f auf X sind dann folgende Aussagen äquivalent:

(i) $f \in h_p^\mu \mathcal{K}_B$

(ii) $-\infty < \mu_*(f^p) = \mu^*(f^p) < +\infty$

$$(iii) \quad f^p \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

$$(iv) \quad f \in \mathcal{L}^p(\mu)$$

Beweis: Die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt aus Satz 2.11; diejenige von (iii) und (iv) aus der Definition von $\mathcal{L}^p(\mu)$. Es bleibt zu zeigen:

(iii) $\rightarrow$ (i): N. Theor. 3 (ii) existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $h \in \mathcal{U}^\mu$ mit $f^p \leq h$ und $\mu(h - f^p) < \varepsilon$. Mit Hilfe der elementaren Ungleichung

$$(a - b)^p \leq a^p - b^p \quad (0 \leq b \leq a, \quad 1 \leq p < \infty)$$

folgt

$$N_p(f - h^{1/p})^p = \mu^*((h^{1/p} - f)^p) \leq \mu(h - f^p) < \varepsilon.$$

Ferner existiert zu $h \in \mathcal{U}^\mu$ n. Satz 2.1 ein $g \in \mathcal{K}_B$ mit $g \leq h$ und $\mu(h - g) < \varepsilon$. Hieraus folgt analog:

$$N_p(h^{1/p} - g^{1/p})^p = \mu^*((h^{1/p} - g^{1/p})^p) \leq \mu(h - g) < \varepsilon.$$

Somit gilt

$$N_p(f - g^{1/p}) \leq N_p(f - h^{1/p}) + N_p(h^{1/p} - g^{1/p}) < 2\varepsilon^{1/p}$$

mit $g^{1/p} \in \mathcal{K}_B$.

(i) $\rightarrow$ (iv): Wegen $\mathcal{K}_B \subset \mathcal{L}^p \subset \mathcal{F}^p$ genügt es zu zeigen, daß $\mathcal{L}_+^p$ abgeschlossen ist in $\mathcal{F}_+^p$. Diese Tatsache beweist man mit Hilfe des folgenden Lemmas:

Lemma 2: Für beliebige positive reelle Funktionen f, g auf X gilt: $N_1(f^p - g^p) \leq p \cdot N_p(f - g) \cdot (N_p(f)^{p-1} + N_p(g)^{p-1})$.

Beweis: (nach STONE [33]) Mit Hilfe des Mittelwertsatzes beweist man die folgende elementare Ungleichung von MAZUR [26]:

$$|a^p - b^p| \leq p \cdot |a - b| \cdot (a^{p-1} + b^{p-1}) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_+$$

Mit Hilfe der Ungleichungen von Hölder und Minkowski (Eigenschaften (γ) und (δ) von μ^*) folgt hieraus:

$$\begin{aligned} N_1(f^p - g^p) &\leq p \cdot N_p(f - g) \cdot N_q(f^{p-1} + g^{p-1}) \quad \text{mit } 1/p + 1/q = 1 \\ &\leq p \cdot N_p(f - g) (N_1(f^{(p-1)q})^{1/q} + N_1(g^{(p-1)q})^{1/q}) \\ &= p \cdot N_p(f - g) \cdot (N_p(f)^{p/q} + N_p(g)^{p/q}) \end{aligned}$$

Wegen $p/q = p - 1$ ist damit das Lemma bewiesen.

Sei nun $f_0 \in \mathcal{F}_+^p \setminus \mathcal{L}_+^p$. Dann existiert n. Satz 2.11 eine reelle Zahl $\alpha > 0$ mit $\mu^*(f_0^p) - \mu_*(f_0^p) = \alpha$. Für eine beliebige Funktion $f \in \mathcal{F}_+^p$ folgt dann aus (8):

$$\mu^*(f^p) = \mu^*((f^p - f_0^p) + f_0^p) \geq \mu_*(f^p - f_0^p) + \mu^*(f_0^p)$$

sowie

$$\mu_*(f^p) = \mu_*(f_0^p + (f^p - f_0^p)) \leq \mu_*(f_0^p) + \mu^*(f^p - f_0^p).$$

Hieraus folgt:

$$\mu^*(f^p) - \mu_*(f^p) \geq \alpha - 2 \cdot \mu^*(|f_0^p - f^p|).$$

N. Lemma 2 ist aber

$$\mu^*(|f_0^p - f^p|) = N_1(f_0^p - f^p) < \alpha/2$$

für

$$N_p(f_0 - f) < \delta = \frac{\alpha}{6p \cdot N_p(f_0)^{p-1}} \wedge 1.$$

Somit gilt für alle $f \in U_\delta(f_0) = \{f \in \mathcal{F}_+^p : N_p(f_0 - f) < \delta\}$

$\mu_*(f^p) < \mu^*(f^p)$ und damit $f \notin \mathcal{L}_+^p$. $\square$

Aus Satz 2.13 folgt nun unmittelbar das folgende Theorem, das die Verbindung zu den Fortsetzungsmethoden von STONE und BOURBAKI herstellt.

Theorem 4: Für jedes $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathbb{B})$ und jede reelle Zahl $p \geq 1$ ist der Raum $\mathcal{L}^p(\mu)$ der Abschluß von $\mathcal{K}(X, \mathbb{B})$ in dem lokal-konvexen Raum $\mathcal{F}^p(\mu)$.

Beweis: Die folgt unmittelbar aus dem vorigen Satz aufgrund der Beziehung $|f|^{p-1} \cdot f = (f^+)^p - (f^-)^p$. $\square$

Das Theorem 4 besagt also: Die p -fach integrierbaren Funktionen auf $(X, \mathcal{B})$ sind genau die Limiten der konvergenten Folgen in $\mathcal{K}(X, \mathcal{B})$ bzgl. der Topologie der Konvergenz im p -ten Mittel.

Korollar 1 : $\mathcal{L}^p(\mu)$ ist ein Vektorverband.

Beweis: Aus $||f| - |g|| \leq |f - g|$ folgt $N_p(|f| - |g|) \leq N_p(f - g) \leq \varepsilon$.

Korollar 2 : Für alle reellen Zahlen $p \geq 1$ und $q \geq 1$ gilt:

Die Funktion f gehört genau dann zu $\mathcal{L}^p(\mu)$, wenn die Funktion $|f|^{\frac{p}{q}-1} \cdot f$ zu $\mathcal{L}^q(\mu)$ gehört.

Beweis: Sei $g := |f|^{\frac{p}{q}-1} \cdot f$. Dann gilt n. Def. von $\mathcal{L}^p$:

$$f \in \mathcal{L}^p \iff |f|^{p-1} \cdot f \in \mathcal{L}^1 \iff |g|^{q-1} \cdot g \in \mathcal{L}^1 \iff g \in \mathcal{L}^q . \quad \square$$

Die Bedeutung des Korollars 2, das hier natürlich einfach aus der Definition der $\mathcal{L}^p$ -Räume folgt, beruht darin, daß sich nun aufgrund des Theorems 4 die $\mathcal{L}^p$ -Räume auch als Abschluß von $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ in $\mathcal{F}^p(\mu)$ interpretieren lassen. Für den Spezialfall, daß $(X, \mathcal{B})$ lokalkompakt ist, erhält man damit das Theorem 7 von BOURBAKI [7], p. 139. Dieses Theorem, das ja die Definition der $\mathcal{L}^p$ -Räume nach BOURBAKI erst rechtfertigt, wird in [7] unter Benutzung des Theorems der abzählbaren Konvergenz, der Vollständigkeit der $\mathcal{L}^p$ -Räume sowie des Satzes von LEBESGUE bewiesen. Diese Hilfsmittel stehen hier aber i. allg. nicht zur Verfügung - und werden auch nicht benötigt, wie der Beweis des Theorems 4 zeigt, bei dem lediglich die Ungleichungen von Minkowski und Hölder verwendet wurden. Es handelt sich hier also um einen allgemeineren Zusammenhang, der insbesondere nicht von der σ -Stetigkeit des zugrundeliegenden Maßes abhängt. Das bedeutet aber, daß sich auch

für das Riemann-Integral (vgl. 3.1) die $\mathcal{L}^p$ -Räume völlig analog zum Lebesgue-Integral definieren lassen - nämlich als Abschluß von $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ in den lokalkonvexen Räumen $\mathcal{F}^p(\mu)$.

Die bisherigen Resultate galten für beliebige Maße μ auf $(X, \mathcal{B})$, da - wie gesagt - keine Stetigkeitsannahmen über μ benötigt wurden. Für σ -stetige Maße läßt sich nun das Theorem der abzählbaren Konvexität (Theorem 5) auf den $\mathcal{L}^p$ -Räumen beweisen, aus dem dann die bekannten spezifisch maß-theoretischen Aussagen wie Vollständigkeit der $\mathcal{L}^p$ -Räume, Monotones Konvergenztheorem und Satz von Lebesgue ([7], [33]) folgen.

Satz 2.14: Sei $\mu \in \mathcal{M}^\sigma(X, \mathcal{B})$. Dann gilt für jede aufsteigende Folge $(f_n) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$:

$$\mu^*(\sup_n f_n) = \sup_n \mu^*(f_n) .$$

Beweis: Wegen der Monotonie von μ^* ist nur zu zeigen " $\leq$ ". N. Theor. 3 (ii) existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jeder natürlichen Zahl n ein $h_n \in \mathcal{U}^\mu$ mit $f_n \leq h_n$ und

$$\mu(f_n) \leq \mu(h_n) \leq \mu(f_n) + \varepsilon \cdot 2^{-n} .$$

Für die Funktionen $g_n := h_1 \vee \dots \vee h_n \in \mathcal{U}^\mu$ zeigt man mit Hilfe vollständiger Induktion (vgl. [7], p. 113):

$$\mu(g_n) \leq \mu(f_n) + \varepsilon \cdot (1 - 2^{-n}) \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Da (g_n) eine aufsteigende Folge in $\mathcal{U}^\mu$ ist, die die Folge (f_n) majorisiert, folgt aus (ε):

$$\mu^*(\sup_n f_n) \leq \mu^*(\sup_n g_n) = \sup_n \mu(g_n) \leq \sup_n \mu(f_n) + \varepsilon .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, ist der Satz bewiesen. $_/\$

Theorem 5: Ist $\mu \in \mathcal{M}^G(X, \mathcal{B})$, so gilt für jede Folge $(f_n) \subset \mathcal{L}_+^p(\mu)$:

$$N_p\left(\sum_n f_n\right) \leq \sum_n N_p(f_n) \quad (\text{abzählbare Konvexität})$$

Beweis: Man betrachte die Funktionen $f := \sum_n f_n$ und $g_n := f_1 + \dots + f_n \in \mathcal{L}^p$ ($n \in \mathbb{N}$). Dann gehören die Funktionen g_n zu $\mathcal{L}^1$ und es gilt $f^p = \sup_n g_n^p$. N. Satz 2.14 gilt $\mu^*(f^p) = \sup_n \mu(g_n^p)$. Wegen $N_p(g_n) \leq \sum_{k=1}^n N_p(f_k)$ folgt somit:

$$N_p(f) = \sup_n N_p(g_n) \leq \sup_n \sum_{k=1}^n N_p(f_k) \quad . \quad \checkmark$$

Satz 2.15: Ist $\mu \in \mathcal{M}^G(X, \mathbb{R})$, so ist der lokalkonvexe Raum $\mathcal{L}^p(\mu)$ vollständig und der zugehörige normierte Raum $L^p(\mu)$ ein Banachraum.

Beweis: Dies folgt aufgrund des Theorems 5 völlig analog wie in [7], pp. 127. /

2.5 Konvergenzsätze

Für jedes Maß μ auf $(X, \mathcal{B})$ gilt der folgende Konvergenzsatz:

Satz 2.16: Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf $\mathcal{L}^p(\mu)$, der μ -f.ü. auf X gleichmäßig gegen die reelle Funktion f_0 konvergiert. Ferner existiere ein $B \in \mathcal{B}$ und ein $M_0 \in \mathcal{F}$, derart daß gilt $\mu(B \setminus T_f) = 0$ für alle $f \in M_0$. Dann ist f_0 p -fach μ -integrierbar und $\mathcal{F}$ konvergiert im p -ten Mittel gegen f_0 .

Beweis: Der Satz folgt unmittelbar aus Satz 2.12 und Theor. 4. /

Ist das Maß μ σ -additiv, so steht das Theorem der abzählbaren Konvexität (Theorem 5) zur Verfügung. Mit seiner Hilfe lassen sich nun für die $\mathcal{L}^p$ -Räume die bekannten Konvergenzsätze der Maßtheorie, nämlich:

Monotones Konvergenztheorem (Satz von Beppo Levi)

Fatou'sches Lemma

Satz von Lebesgue

beweisen. Die Beweise verlaufen aufgrund des Theorems 5 völlig analog wie bei den entsprechenden Aussagen für Radonmaße (siehe [7], p. 136-38), so daß auf deren Ausführung verzichtet werden kann. Für die Banachräume L^p läßt sich das Monotone Konvergenztheorem verschärfen zu der Aussage:

Satz 2.17: Ist $\mu \in \mathcal{M}^G(X, \mathcal{B})$, so ist $L^p(\mu)$ ein vollständiger Vektorverband.

Der Beweis verläuft ebenfalls analog zu [7], p. 134 .

2.6 Integration vektorwertiger Funktionen

Gegeben sei ein Maß $\mu \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{B})$ und ein Banachraum F .

F^X bezeichne die Menge aller Abbildungen von X in F .

$\mathcal{K}_F(X, \mathcal{B})$ oder kurz $\mathcal{K}_F$ sei die Menge aller $\vec{g} \in F^X$ der Form:

$$(6) \quad \vec{g} = \sum_{i=1}^n a_i g_i \quad (a_i \in F, g_i \in \mathcal{K}(X, \mathcal{B})) .$$

Für $F = \mathbb{R}$ gilt offenbar $\mathcal{K}_F = \mathcal{K}$.

Für jedes $a \in F$ bezeichne $|a|$ die Norm von a . Setzt man

für jedes $1 \leq p < \infty$ und jede Abbildung $\vec{f} \in F^X$

$$N_p(\vec{f}) := \mu^*(|\vec{f}|^p)^{1/p}$$

so ist wegen der Eigenschaften (γ) , (δ) und (η) von μ^*

N_p eine Halbnorm auf dem Vektorraum

$$\mathcal{F}_F^p = \mathcal{F}_F^p(\mu) := \{ \vec{f} \in F^X : N_p(\vec{f}) < \infty \} .$$

Satz 2.18: $\mathcal{K}_F$ ist ein linearer Unterraum des lokalkonvexen Raumes $\mathcal{F}_F^p$.

Beweis: Sei $\vec{g}$ von der Gestalt (6). Dann gilt wegen $\mathcal{K}_{\mathbb{B}} \subset \mathcal{F}^p$:

$$N_p(\vec{g}) \leq \sum_{i=1}^n N_p(a_i g_i) = \sum_{i=1}^n |a_i| N_p(g_i) < \infty \quad _$$

Definition 2.9: $\mathcal{L}_F^1 = \mathcal{L}_F^1(\mu)$ bezeichne den Abschluß von $\mathcal{K}_F$ in dem lokalkonvexen Raum $\mathcal{F}_F^p(\mu)$.

Für jede reelle Zahl $p \geq 1$ heiße

$$\mathcal{L}_F^p = \mathcal{L}_F^p(\mu) := \{ \vec{f} \in F^X : |\vec{f}|^{p-1} \vec{f} \in \mathcal{L}_F^1(\mu) \}$$

die Menge der p-fach integrierbaren Abbildungen von X in F.

Aufgrund des Theorems 4 stimmt die obige Definition für den Fall $F = \mathbb{R}$ mit der in 2.1 bzw. 2.4 gegebenen überein.

Für jede Abbildung $\vec{f} \in F^X$ und jedes $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{x_j} \in \mathcal{E}$ ist

$$v(\vec{f}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{f}(x_j)$$

wohl definiert in F. Man kann somit jedes $\vec{f} \in F^X$ auch als eine lineare Abbildung $v \rightarrow v(\vec{f})$ von $\mathcal{E}$ in F auffassen. Ist $\mathcal{F}_\mu$ der nach 2.1 dem Maß μ zugeordnete Filter auf $\mathcal{E}_+$, so ist folglich $\vec{f}(\mathcal{F}_\mu)$ eine Filterbasis auf F.

Theorem 6: Für alle $\vec{g} \in \mathcal{L}_F^1(\mu)$ ist $\vec{g}(\mathcal{F}_\mu)$ konvergent.

Beweis: Da ein F ein Banachraum, genügt es z.z.: $\vec{g}(\mathcal{F}_\mu)$ ist ein Cauchyfilter auf F.

(a) Sei zunächst $\vec{g} \in \mathcal{K}_F$, also $\vec{g} = \sum_{i=1}^n a_i g_i$ mit $a_i \in F$ und $g_i \in \mathcal{K}_{\mathbb{B}}$. Dann gilt für jedes $v \in \mathcal{E}$ die Beziehung:

$$v(\vec{g}) = \sum_{i=1}^n a_i v(g_i) \quad .$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} |v(\vec{g}) - v'(\vec{g})| &= \left| \sum_i a_i (v(g_i) - v'(g_i)) \right| \\ &\leq \sum_i |a_i| |v(g_i) - v'(g_i)| \\ &< \varepsilon \cdot \sum_i |a_i| \quad \forall v, v' \in M_{g_1, \dots, g_n, \varepsilon} . \end{aligned}$$

(b) Zu $\vec{f} \in \mathcal{L}_F^1$ und $\varepsilon > 0$ existiert n. Def. von $\mathcal{L}_F^1$ ein $\vec{g}$ aus $\mathcal{K}_F$ mit

$$N_1(\vec{f} - \vec{g}) = \limsup_{V, \vec{f}_\mu} V(|\vec{f} - \vec{g}|) < \varepsilon.$$

Somit existiert ein $M_0 \in \mathcal{F}_\mu$, so daß für alle $V \in M_0$ gilt:

$$|V(\vec{f}) - V(\vec{g})| \leq V(|\vec{f} - \vec{g}|) < \varepsilon.$$

Daraus folgt zusammen mit (a):

$$|V(\vec{f}) - V'(\vec{f})| < 3\varepsilon \quad \forall V, V' \in M_0 \wedge M_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n, \varepsilon'}$$

mit $\varepsilon' = \varepsilon \left(\sum_{i=1}^n |a_i| \right)^{-1}$, falls wenigstens ein $a_i \neq 0$, und $\varepsilon' = \varepsilon$ sonst.

Bekanntlich wird von BOURBAKI [7], p. 75 bzw. 140, das Integral der μ -integrierbaren Funktionen mit Werten in einem Banachraum F definiert als die stetige Fortsetzung von $\mathcal{K}_F$ auf $\mathcal{L}_F^1$ derjenigen Linearform $\vec{g} \rightarrow \int \vec{g} d\mu$ auf $\mathcal{K}_F$ mit der Eigenschaft

$$\langle \int \vec{g} d\mu, z' \rangle = \int \langle \vec{g}, z' \rangle d\mu \quad \forall \vec{g} \in \mathcal{K}_F \quad \forall z' \in F'.$$

Das Theorem 6 gestattet nun die folgende einfache Integraldefinition:

Definition 2.10: Für jedes $\vec{f} \in \mathcal{L}_F^1(\mu)$ heiße

$$\int \vec{f} d\mu := \lim_{\vec{f}_\mu} \vec{f}$$

das Integral von f (bzgl. μ).

Man verifiziert leicht, daß das so definierte Integral die Eigenschaft besitzt, die bei BOURBAKI als Definition verwendet wird.

Satz 2.19: Für jedes $\vec{f} \in \mathcal{L}_F^1$ und jedes $z' \in F'$ gilt:

$$(7) \quad \langle \int \vec{f} d\mu, z' \rangle = \int \langle \vec{f}, z' \rangle d\mu$$

Beweis: Für jedes $v \in \mathcal{E}$ ist die Beziehung (7) evident.

Aus der Stetigkeit von z' auf F folgt:

$$\lim_{v, \mathcal{F}_\mu} \langle \vec{f}, z' \rangle = \lim_{v, \mathcal{F}_\mu} \langle v(\vec{f}), z' \rangle = \langle \lim_{\mathcal{F}_\mu} \vec{f}, z' \rangle \quad _ /$$

Satz 2,20: Für jedes $\vec{f} \in \mathcal{L}_F^1$ gilt:

$$|\int \vec{f} d\mu| \leq \int |\vec{f}| d\mu = N_1(\vec{f}) .$$

Beweis: Für $v \in \mathcal{E}_+$ gilt $|v(\vec{f})| \leq v(|\vec{f}|)$. Hieraus folgt:

$$|\lim_{\mathcal{F}_\mu} v(\vec{f})| = \lim_{\mathcal{F}_\mu} |v(\vec{f})| \leq \lim_{\mathcal{F}_\mu} v(|\vec{f}|) \quad _ /$$

Satz 2,21: Wenn die Funktion $\vec{f}$ zu $\mathcal{L}_F^p$ gehört, so gehört die Funktion $|\vec{f}|$ zu $\mathcal{L}^p$. Die Abbildung $\vec{f} \rightarrow |\vec{f}|$ von $\mathcal{L}_F^p$ in $\mathcal{L}^p$ ist gleichmäßig stetig (bzgl. der Topologie der Konvergenz im p -ten Mittel).

Beweis: N. Def. von $\mathcal{L}_F^p$ existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\vec{g} \in \mathcal{K}_F$ mit $N_1(|\vec{f}|^{p-1} \vec{f} - \vec{g}) < \varepsilon$. Die Funktion $|\vec{g}|^{1/p}$ gehört zu $\mathcal{K}_B$ und es gilt:

$$\begin{aligned} N_1(|\vec{f}| - |\vec{g}|^{1/p} |\vec{f}|^p) &\leq N_1(|\vec{f}|^p - |\vec{g}|) \\ &\leq N_1(|\vec{f}|^{p-1} \vec{f} - |\vec{g}|) < \varepsilon . \end{aligned}$$

Aus Theor. 4 folgt somit $|\vec{f}| \in \mathcal{L}^p$. Für $\vec{f}, \vec{g} \in \mathcal{L}_F^p$ gilt ferner: $N_p(|\vec{f}| - |\vec{g}|) \leq N_p(\vec{f} - \vec{g})$, woraus die gleichmäßige Stetigkeit der Abbildung $\vec{f} \rightarrow |\vec{f}|$ folgt. $_ /$

Einige Bemerkungen zur Integration von Abbildungen mit Werten in einem topologischen Vektorraum

$\mathcal{L}_F^p$ -Räume sind u.W. bisher nur für Abbildungen in Banachräume definiert worden. Die in diesem Abschnitt gegebene Integraldefinition ist jedoch nicht auf solche Abbildungen beschränkt. Grundsätzlich läßt sich für jeden separierten topologischen Vektorraum E und jede reelle Zahl $p \geq 1$ die Menge $\mathcal{L}_E^p(\mu)$

aller p -fach μ -integrierbaren Abbildungen von X in E analog wie in 2.1 bzw. 2.4 definieren als

$$\mathcal{L}_E^p := \{ \vec{f} \in E^X : |\vec{f}|^{p-1} \cdot \vec{f}(\mathcal{F}_\mu) \text{ Cauchyfilter auf } E \}$$

Das Integral

$$\int \vec{f} d\mu := \lim_{\vec{v}, \vec{f}_\mu} \vee(\vec{f}) = \lim \vec{f}(\vec{f}_\mu)$$

ist folglich ein Element aus der Vervollständigung $\hat{E}$ von E (anstelle von E^* in der Definition von BOURBAKI [7], p.75, für lokalkonvexe Räume E).

Ist E speziell ein lokalkonvexer Hausdorff Raum, so zeigt man ähnlich wie in Theorem 6, daß für jedes $1 \leq p < \infty$ die Menge $\mathcal{K}_E$ in $\mathcal{L}_E^p$ enthalten ist. Analog zu Satz 2.19 folgt ferner, daß die Restriktion der Linearform $\vec{f} \rightarrow \int \vec{f} d\mu$ auf $\mathcal{K}_E$ die Eigenschaft (7) besitzt und hier somit mit der Integraldefinition von BOURBAKI übereinstimmt (falls X zusätzlich lokalkompakt ist).

Es erhebt sich die Frage, ob sich die linearen Räume $\mathcal{L}_E^p$ ebenfalls als Abschluß von $\mathcal{K}_E$ in einem lokalkonvexen Raum beschreiben lassen. Es ist zu vermuten, daß sich die Frage positiv beantworten läßt und folgendes gilt:

Die Topologie von E sei durch die Familie der Halbnormen $(p_i)_{i \in I}$ gegeben. Für jedes $i \in I$ sei

$$N_p^i(\vec{f}) := (\mu^*(p_i(\vec{f}^p)))^{1/p}$$

Dann ist $(N_p^i)_{i \in I}$ eine Familie von Halbnormen auf dem Vektorraum

$$\mathcal{F}_E^p(\mu) := \{ \vec{f} \in E^X : N_p^i(\vec{f}) < \infty \quad \forall i \in I \} .$$

Vermutung: $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ ist der Abschluß von $\mathcal{K}_E$ in dem lokal konvexen Raum $\mathcal{F}_E^p(\mu)$ versehen mit der Familie der Halbnormen $(N_p^i)_{i \in I}$.

§ 3 Beziehungen zu den "klassischen" Integrationstheorien

3.1 Das Riemann-Integral für unstetige Maße

Für jedes positive Maß μ auf $(X, \mathcal{B})$ erfüllt das Tripel $(X, \mathcal{K}_{\mathcal{B}}, \mu)$ die Voraussetzungen der Theorie des Riemann-Integrals nach LOOMIS [25]. Somit sind die LOOMISschen Resultate anwendbar, und es erhebt sich die Frage, in welchem Zusammenhang diese mit den in 2.1 und 2.2 gewonnenen Ergebnissen stehen.

Nach LOOMIS leitet sich aus $(X, \mathcal{K}_{\mathcal{B}}, \mu)$ ab:

- (a) Das System $Q = Q(\mathcal{K}_{\mathcal{B}}, \mu)$ der μ -quadrierbaren Teilmengen von X ;
- (b) Der vollständige Inhalt $\tilde{\mu}$ auf Q ;
- (c) Das System $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathcal{K}_{\mathcal{B}}, \mu)$ der bzgl. μ (eigentlich) Riemann-integrierbaren Funktionen auf X ;
- (d) Das Riemann-Integral $\bar{I}(g) = \int g \, d\tilde{\mu}$ auf $\mathcal{S}'$.

Satz 3.1: Für jedes unstetige⁺ positive Maß μ auf $(X, \mathcal{B})$ gilt:

- (i) $\mathcal{Q}_{\mu}$ sei das System der nach 2.2 μ -integrierbaren Mengen von X und μ der zugehörige Inhalt. Dann gilt

$$\mathcal{Q}_{\mu} = Q(\mathcal{K}_{\mathcal{B}}, \mu)$$

und die Inhalte μ und $\tilde{\mu}$ stimmen überein.

- (ii) $\mathcal{L}^1(\mu)$ sei der Vektorverband der nach 2.1 μ -integrierbaren Funktionen auf X . Dann gilt

$$\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{S}'(\mathcal{K}_{\mathcal{B}}, \mu)$$

und die Integrale μ und $\bar{I}$ stimmen überein.

⁺) Ist μ stetig, so wird μ wegen des Prinzips der Maximalität der Fortsetzung über die Riemann-integrierbaren Funktionen hinaus auf die Lebesgue-integrierbaren fortgesetzt. In diesem Fall gilt somit $Q \subset \mathcal{Q}_{\mu}$ und $\mathcal{S}' \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ und die Restriktionen von μ auf Q bzw. $\mathcal{S}'$ stimmen mit $\tilde{\mu}$ bzw. $\bar{I}$ überein.

Beweis: Wir zeigen zunächst (ii). N. Vor. ist $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{B}} \setminus \mathcal{M}_{\mathbb{B}}^{\sigma}$.

Folglich, da $\mathcal{K}_{\mathbb{B}}$ ein Vektorverband ist, gilt $\mathcal{U}^{\mu} = \mathcal{K}_{\mathbb{B}}$.

N. Theor. 3 (iii) besteht somit $\mathcal{L}^1(\mu)$ genau aus denjenigen reellen Funktionen f auf X mit der Eigenschaft:

$$(8) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists g, h \in \mathcal{K} : g \leq f \leq h \wedge \mu(h - g) < \varepsilon.$$

Das ist aber gerade die Definition der zweiseitigen Vervollständigung im Sinne von LOOMIS $\overline{\mathcal{K}} = \mathcal{U}(\mathcal{K}, \mu)$. Wegen $\mathcal{S} \subset \overline{\mathcal{K}} = \mathcal{L}^1$ bleibt nur zu zeigen: Jedes $f \in \overline{\mathcal{K}}$ ist Riemann-integrierbar.

Für jedes $f \in \overline{\mathcal{K}}$ gilt aber: (a) f ist μ -meßbar im Sinne von LOOMIS [25], S. 171; (b) f ist beschränkt; (c) f verschwindet im Komplement einer μ -quadrierbaren Menge. (c) ist nach BAUER [3], S. 452, äquivalent zu:

$$(c') \quad \exists k \in \mathcal{K}_+ : k(x) < 1 \leadsto f(x) = 0.$$

Beweis von (c'): Zu den Funktionen g, h in (8) existieren nach Axiom (B3) Funktionen $g_0, h_0 \in \mathcal{K}_{\mathbb{B}}$ mit $T_g \subset E(g_0)$ und $T_h \subset E(h_0)$. Für die Funktion $k := |g_0| \vee |h_0| \in \mathcal{K}_+$ gilt dann: $k(x) < 1 \leadsto x \in \mathcal{C}(T_g \cup T_h) \leadsto 0 = g(x) \leq f(x) \leq h(x) = 0$. Hiermit ist (c') gezeigt. Jede Funktion f mit den Eigenschaften (a), (b) und (c) ist aber nach BAUER [3], S. 452, Riemann-integrierbar.

Die Identität von μ und $\overline{\mathcal{I}}$ folgt aus der Eindeutigkeit der Fortsetzung von μ auf $\mathcal{L}^1(\mu)$ gem. Theor. 3 (i).

(i) folgt unmittelbar aus (ii) aufgrund der Beziehungen:

$$A \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mu} \iff 1_A \in \mathcal{L}^1(\mu) \iff 1_A \in \overline{\mathcal{K}} \iff A \in \mathcal{Q} \quad . \quad _ /$$

3.2 Das Daniell-Integral für σ -stetige Maße

Für jedes Maß $\mu \in \mathcal{M}_+^{\sigma}(X, \mathcal{B})$ erfüllt das Tripel $(X, \mathcal{K}_{\mathcal{B}}, \mu)$ die Voraussetzungen der Integrationstheorien von DANIELL [10] bzw. STONE [33]; denn nach Lemma 1 in 2.1 gilt für jede aufsteigende Folge $(g_n) \subset \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ mit $\sup g_n \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$:

$$(M) \quad \mu \left(\sup_n g_n \right) = \sup_n \mu(g_n) .$$

μ ist somit ein Daniell- bzw. erstes Stone-Integral auf $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$.

Von μ ausgehend definiert man nach dem ersten STONESchen Integrationsprozeß [33/I] für jede positive numerische Funktion f auf X ein Oberintegral $\bar{\mu}(f)$ wie folgt: $\mathcal{G}(f)$ bezeichne die Menge aller aufsteigenden Folgen $(g_n) \subset \mathcal{K}_+$ mit $f \leq \sup_n g_n$; man definiert (vgl. [4], p. 56):

$$(9) \quad \bar{\mu}(f) = \begin{cases} +\infty & (\mathcal{G}(f) = \emptyset) \\ \inf_{(f_n) \in \mathcal{G}(f)} \left(\sup_n \mu(f_n) \right) & (\mathcal{G}(f) \neq \emptyset) \end{cases}$$

F sei ein Banachraum mit der Norm $|a|$ für $a \in F$. Für jede Abbildung $\vec{f}$ von X in F und jede reelle Zahl $p \geq 1$ setzt man nach STONE:

$$\widetilde{N}_p(\vec{f}) := (\bar{\mu}(|\vec{f}|^p))^{1/p} .$$

Mit Hilfe von $\widetilde{N}_p$ werden bei STONE genau wie in Abschnitt 2.6 die Mengen $\widetilde{\mathcal{F}}_F^p = \widetilde{\mathcal{F}}_F^p(X, \mathcal{K}_{\mathcal{B}}, \mu)$ und $\widetilde{\mathcal{L}}_F^p = \widetilde{\mathcal{L}}_F^p(X, \mathcal{K}_{\mathcal{B}}, \mu)$ definiert. Allerdings läßt STONE als Elemente von $\widetilde{\mathcal{F}}_F^p$ und $\widetilde{\mathcal{L}}_F^p$ auch Funktionen zu, die nur μ -f.ü. auf X erklärt sind. $\mathcal{F}_F^p(X, \mathcal{K}_{\mathcal{B}}, \mu)$ und $\mathcal{L}_F^p(X, \mathcal{K}_{\mathcal{B}}, \mu)$ bezeichne daher die Menge aller reellen Funktionen aus $\widetilde{\mathcal{F}}_F^p$ bzw. $\widetilde{\mathcal{L}}_F^p$, die auf ganz X definiert sind.

Satz 3.2: Sei μ ein strikt^{+) 5}-stetiges Maß auf $(X, \mathcal{B})$.

Für jeden Banachraum F und jedes $1 \leq p < \infty$ sei $\mathcal{L}_F^p(\mu)$ der in 2.6 definierte lokalkonvexe Raum versehen mit der N_p -Halbnorm. Dann ist

$$\mathcal{L}_F^p(\mu) = \mathcal{L}_F^p(X, \mathcal{K}_{\mathcal{B}}, \mu)$$

und die Halbnormen N_p und $\tilde{N}_p$ (und somit die Integrale der p -fach integrierbaren Abbildungen von X in F) stimmen auf $\mathcal{L}_F^p$ überein.

Beweis: (a) -Sei zunächst $p = 1$ und $F = \mathbb{R}$. Es gilt folgendes Kriterium für Integrierbarkeit im Sinnes des 1. Stone-Integrals [21] : Eine positive reelle Funktion f auf X ist genau dann μ -integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine aufsteigende Folge $(h_n) \subset \mathcal{K}_+$ und eine fallende Folge $(g_n) \subset \mathcal{K}_+$ existieren mit $\inf g_n \leq f \leq \sup h_n$ und $\sup \mu(h_n) - \inf \mu(g_n) < \varepsilon$. Dies ist aber gerade die Aussage (iii) des Theorems 3. Somit folgt: $\mathcal{L}_+^1(\mu) = \mathcal{L}_+^1(X, \mathcal{K}_{\mu}, \mu)$ und damit die Äquivalenz der $\mathcal{L}^1$ -Räume. N. Theor. 3 (ii) gilt außerdem:

$$\mu^*(f) = \mu(f) = \inf_{f \leq h \in \mathcal{U}^+} \mu(h) = \inf_{(h_n) \in \mathcal{G}(f)} \sup_n \mu(h_n) = \bar{\mu}(f).$$

Somit stimmen die Halbnormen N_1 und $\tilde{N}_1$ auf $\mathcal{L}^1(\mu)$ überein.

(b) Da die Definitionen der $\mathcal{L}^p$ -Räume nach STONE und nach 2.4 identisch sind, folgt aus der Äquivalenz der $\mathcal{L}^1$ -Räume auch die Gleichheit der $\mathcal{L}^p$ -Räume. Die Gleichheit der Halbnormen N_p und $\tilde{N}_p$ auf $\mathcal{L}^p$ folgt aus der Beziehung

$$f \in \mathcal{L}^p \leadsto |f|^p \in \mathcal{L}^1$$

und $\mu^* = \bar{\mu}$ auf $\mathcal{L}^1$.

^{+) Ist μ τ -additiv, so entspricht die Fortsetzungsmethode in § 2 wegen der Maximalität der Fortsetzung dem zweiten STONESchen Integrationsprozeß (siehe 3.3).}

(c) Für einen beliebigen Banachraum F folgt die Äquivalenz der $\mathcal{L}_F^p$ -Räume für $p = 1$ aus der Übereinstimmung der N_1 -Halbnormen auf $\mathcal{L}^1$ und für $1 < p < \infty$ aus den übereinstimmenden Definitionen. $_$

3.3 Das Bourbaki-Integral für τ -stetige Maße

Für jedes $\mu \in \mathcal{M}_+^\tau(X, \mathcal{B})$ ist das Tripel $(X, \mathcal{K}_\mathcal{B}, \mu)$ ein STONESches Elementarintegral mit der stärkeren Stetigkeitseigenschaft: Für jedes aufst. filtr. System $(g_\alpha) \subset \mathcal{K}_\mathcal{B}$ mit $\sup_\alpha g_\alpha \in \mathcal{K}_\mathcal{B}$ gilt (Lemma 1) :

$$(M^*) \quad \mu \left(\sup_\alpha g_\alpha \right) = \sup_\alpha \mu(g_\alpha) .$$

Somit ist der zweite STONESche Integrationsprozeß [33/IV] anwendbar. Anstelle des in (9) definierten Oberintegrals tritt dabei das wie folgt definierte Oberintegral $\bar{\mu}^*$:

Für jede positive numerische Funktion f auf X bezeichne $\tau(f)$ die Menge aller aufst. filtr. Systeme $H \subset \mathcal{K}_+$ mit $f \leq \sup_{g \in H} g$; man definiert (vgl. [4], p. 61) :

$$\bar{\mu}^*(f) := \begin{cases} + \infty & (\tau(f) = \emptyset) \\ \inf_{H \in \mathcal{T}(f)} \sup_{g \in H} \mu(g) & (\tau(f) \neq \emptyset) \end{cases}$$

Für jedes $1 \leq p < \infty$ und jede Abbildung $\vec{f}$ von X in einen Banachraum F setzt man nach STONE:

$$\tilde{N}_p^*(\vec{f}) := (\bar{\mu}^*(|\vec{f}|^p))^{1/p} .$$

Ersetzt man in den Definitionen der Räume $\mathcal{F}_F^p$ und $\mathcal{L}_F^p$ nach dem ersten Integrationsprozeß jeweils die Halbnormen $\tilde{N}_p$ durch $\tilde{N}_p^*$, so erhält man die Räume $\mathcal{F}_F^{p*}$ und $\mathcal{L}_F^{p*}$. Nach [4], p. 61, gelten die Inklusionen $\mathcal{L}_F^p \subset \mathcal{L}_F^{p*}$ und die Halbnormen $\tilde{N}_p$ und

$\tilde{N}_p^*$ stimmen auf $\mathcal{L}_F^p$ überein.

Satz 3.3: Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^T(X, \mathbb{B})$. Für jeden Banachraum F und jedes $1 \leq p < \infty$ sei $\mathcal{L}_F^p(\mu)$ der in 2.6 definierte lokalkonvexe Raum versehen mit der N_p -Halbnorm. Dann ist

$$\mathcal{L}_F^p(\mu) = \mathcal{L}_F^{p*}(X, \mathcal{K}_{\mathbb{B}}, \mu)$$

und die Halbnormen N_p und $\tilde{N}_p^*$ (und somit die Integrale der p -fach integrierbaren Abbildungen von X in F) stimmen auf $\mathcal{L}_F^p$ überein.

Beweis: Es genügt, den Satz für den Fall $p = 1$ und $F = \mathbb{R}$ zu beweisen. Die restlichen Überlegungen verlaufen analog wie beim Beweis des Satzes 3.2 .

Das Kriterium für Integrierbarkeit einer positiven reellen Funktion f auf X im Sinne des zweiten Stone-Integrals lautet [21]: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren ein aufst. filtr. System $H \subset \mathcal{K}_{\mathbb{B}}$ sowie ein abst. filtr. System $G \subset \mathcal{K}_{\mathbb{B}}$ mit

$$\inf_{g \in G} g \leq f \leq \sup_{h \in H} h \quad \text{und} \quad \sup_{h \in H} \mu(h) - \inf_{g \in G} \mu(g) < \varepsilon .$$

Diese Bedingung ist für $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{B}}^T$ jedoch wiederum genau analog zu der Bedingung (iii) des Theorems 3. Somit stimmen die reellen μ -integrierbaren Funktionen nach 2.1 und nach STONE überein. Ferner folgt aus Theor. 3 (ii) für jedes $f \in \mathcal{L}_+^1(\mu)$:

$$\mu^*(f) = \mu(f) = \inf_{f \leq h \in \mathcal{U}^n} \mu(h) = \inf_{H \in \mathcal{T}(f)} \sup_{h \in H} \mu(h) = \bar{\mu}^*(f) . \quad _ /$$

Wir betrachten noch gesondert den Spezialfall, daß $(X, \mathbb{B})$ lokalkompakt ist. In diesem Fall ist $\mathcal{K}_{\mathbb{B}}$ der Ring aller stetigen reellen Funktionen auf X mit kompaktem Träger, und jedes $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathbb{B})$ ist ein Radonmaß. Da wegen $\mathbb{B} = \bar{\mathcal{K}}$ (siehe

Satz 1.2) die Topologien $\mathcal{T}_B^u$ und $\mathcal{T}_B^c$ auf $\mathcal{K}_B$ übereinstimmen, ist jedes Radonmaß straff - also speziell τ -stetig. Aufgrund der Äquivalenz der BOURBAKIschen Integrationstheorie für Radonmaße mit dem zweiten STONESchen Integrationsprozeß, liefert der Satz 3.3 die Übereinstimmung der $\mathcal{L}_F^p$ -Räume nach 2.6 und nach BOURBAKI [7].

$\mathcal{J} = \mathcal{J}(X)$ bezeichne die Menge aller reellen, nach unten halbstetigen Funktionen auf X . Das System $\mathcal{U}^n$ besteht dann n. Def. 2.1 und nach BOURBAKI [7], p. 106, aus allen $h \in \mathcal{J}_+(X)$ mit $\mu(h) < \infty$. Somit liefert Theorem 3 (iii) folgendes Integrationskriterium:

Satz 3.4: Eine reelle Funktion f auf X ist genau dann μ -integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine nach oben halbstetige reelle Funktion g mit kompaktem Träger und eine nach unten halbstetige reelle Funktion h existieren, so daß gilt $g \leq f \leq h$ und $\int (h - g) d|\mu| < \varepsilon$.

Man vergleiche die analoge Aussage des Theorems 3 in [7], p.147. Aus Theor. 3 (ii) folgt außerdem für jedes $f \in \mathcal{L}_+^1(\mu)$:

$$\mu^*(f) = \mu(f) = \inf_{f \leq h} \mu(h) = \inf_{h \in \mathcal{J}_+} \sup_{\substack{g \leq h \\ g \in \mathcal{K}} \mu(g) \quad .$$

Dies ist aber gerade die Definition des Oberintegrals nach BOURBAKI [7], pp. 106.

Hiermit ist noch einmal direkt die Äquivalenz des BOURBAKI-Integrals in lokalkompakten Räumen mit dem in § 2 entwickelten Integralbegriff gezeigt.

3.4 Eingliederung der abstrakten Theorie des Riemann-Integrals nach LOOMIS

In 3.1 wurde gezeigt, daß für jedes unstetige Maß μ die Integrationstheorie auf dem lokalbeschränkten Raum $(X, \mathcal{B})$ äquivalent ist zu der abstrakten Theorie des Riemann-Integrals nach LOOMIS angewandt auf $(X, \mathcal{K}_{\mathcal{B}}, \mu)$. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß auch die Umkehrung gilt. D.h. genauer: Zu jeder positiven Linearform I auf einem Vektorverband $\mathcal{R}$ von reellen Funktionen, die auf einer beliebigen Menge X definiert sind, existiert ein lokalbeschränkter Raum $(X, \mathcal{B})$ und ein $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$, derart daß die Integrationstheorie auf $(X, \mathcal{B})$ bzgl. μ äquivalent ist zu der LOOMIS'schen Theorie angewandt auf $(X, \mathcal{R}, I)$.

Es bedeutet somit keinen Verlust an Allgemeinheit gegenüber dem Standpunkt von LOOMIS, stets von dem konkreten Fall eines Maßes auf einem lokalbeschränkten Raum auszugehen. Der "konkrete" Standpunkt hat zudem den Vorteil, daß die zusätzliche Struktur, die durch die Einführung einer Topologie und eines Beschränkungssystems auf der Menge X erzeugt wird, präzisere Aussagen (vgl. etwa Satz 2.5) als im abstrakten Fall ermöglicht.

Im Gegensatz zur Konkretisierung der LOOMIS'schen Theorie mittels Kompaktifizierung durch BAUER [3], bei der der ursprüngliche Definitionsbereich der Funktionen aus $\mathcal{R}$ durch Einführung von idealen Punkten zu einem lokalkompakten Raum erweitert wird, wird bei der Konkretisierung durch Einführung einer lokalbeschränkten Struktur auf X der Definitionsbereich von $\mathcal{R}$ beibehalten.

Ausgangspunkt der LOOMISSchen Theorie sind $([3], [25])$:

- (1°) Eine beliebige Menge X mit Elementen $x, y, \dots$;
- (2°) Ein Vektorverband $\mathcal{R}$ von reellen Funktionen $f, g, \dots$ auf X mit der Eigenschaft:

$$(10) \quad 1 \wedge g \in \mathcal{R} \quad \forall g \in \mathcal{R}$$

- (3°) Eine positive Linearform I auf $\mathcal{R}$.

Nach BAUER [3], S. 470-71, bedeutet es in Hinblick auf die LOOMISSche Theorie keine Einschränkung, über $\mathcal{R}$ die folgenden drei Zusatzvoraussetzungen zu machen:

- (11) Jede Funktion aus $\mathcal{R}$ ist beschränkt;
- (12) $\mathcal{R}$ ist punktetrennend auf X ;
- (13) $\forall x \in X \quad \exists g \in \mathcal{R} : g(x) \neq 0$.

Mit H. BAUER bezeichnen wir mit $\mathcal{R}_0$ den Teilverband aller beschränkten Funktionen $g_0 \in \mathcal{R}$ mit der Eigenschaft:

$$(14) \quad \exists h \in \mathcal{R}_+ : h(x) < 1 \leadsto g_0(x) = 0 .$$

Mit Hilfe des Vektorverbandes $\mathcal{R}_0$ läßt sich folgende lokal-beschränkte Struktur auf X einführen:

$\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ sei diejenige Topologie auf X , für welche die Mengen der Form $(Z(g))_{g \in \mathcal{R}_0}$ eine abgeschlossene Basis bilden. $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ ist nach [12], 3.6, die grösste Topologie auf X , bzgl. welcher alle Funktionen aus $\mathcal{R}$ stetig sind, und $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ ist wegen Eigenschaft (13) von $\mathcal{R}$ vollständig regulär.

Lemma 3: Das System

$$\mathcal{B} = (E(g))_{g \in \mathcal{R}_0}$$

bildet ein Beschränkungssystem auf dem vollständig regulären Raum X .

Beweis: (B1) folgt unmittelbar aus der Verbandseigenschaft

und (B2) aus der Eigenschaft (13) von $\mathcal{R}_0$. Sei nun $B_i = E(g)$ für ein $g \in \mathcal{R}_0 \subset \mathcal{C}(X)$. Wegen (14) existiert ein $h \in \mathcal{R}_+$ mit $T_g \subset E(h)$. Aufgrund der Verbandseigenschaft von $\mathcal{R}$ läßt sich ~~ein~~ $h \in \mathcal{R}_0$ wählen. Somit folgt für $B_j = E(h \wedge 1) \in \mathcal{B}$:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in B_i \\ 0 & x \in \mathcal{C} B_j \end{cases} \quad . \quad _ /$$

Satz 3.5: Zu $(X, \mathcal{R}, I)$ mit den Eigenschaften (1°) - (3°) existieren eindeutig ein lokalbeschränkter Raum $(X, \mathcal{B}_{\mathcal{R}})$ und ein $\mu \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{B}_{\mathcal{R}})$, derart daß gilt:

- (i) Das System δ_{μ} der nach 2.2 μ -integrierbaren Mengen von X ist identisch mit dem System $\mathcal{Q}(\mathcal{R}, I)$ der nach LOOMIS I -quadrierbaren Mengen. Die Inhalte μ und $\tilde{\mu}$ stimmen überein.
- (ii) Das System $\mathcal{L}^1(\mu)$ der nach 2.1 μ -integrierbaren Funktionen auf X ist identisch mit dem System $\mathcal{S}'(\mathcal{R}, I)$ der nach LOOMIS Riemann-integrierbaren Funktionen, und die Integrale μ und $\bar{I}$ stimmen überein.

Beweis: Wie bereits gezeigt, ist X versehen mit der Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ ein vollständig regulärer Raum und $\mathcal{B}_{\mathcal{R}} := (E(g))_{g \in \mathcal{R}_0}$ ein Beschränkungssystem auf X . Folglich ist $(X, \mathcal{B}_{\mathcal{R}})$ lokalbeschränkt. Mit Hilfe von [28] zeigt man, daß jede Funktion $g \in \mathcal{K} = \mathcal{K}(X, \mathcal{B}_{\mathcal{R}})$ gleichmäßig durch Funktionen aus $\mathcal{R}_0$ approximiert werden kann. Folglich läßt sich die Linearform $I_0 = \text{Rest}_{\mathcal{R}_0} I$ eindeutig zu einer positiven Linearform μ auf $\mathcal{K}$ und damit zu einem positiven Maß auf $(X, \mathcal{B}_{\mathcal{R}})$ fortsetzen. $\mathcal{V}(\mathcal{R}, I) = \overline{\mathcal{R}}$ bezeichne die zweiseitige Vervollständigung von $\mathcal{R}$ bzgl. I im Sinne von Loomis. Dann gilt n. Theor. 3 (iii): $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{V}(\mathcal{K}, \mu) =: \overline{\mathcal{K}}$.

Wir zeigen: $\overline{\mathcal{K}} = \mathcal{S}'(\mathcal{R}, I)$. Da jedes $f \in \mathcal{K}$ durch Funktionen

aus $\mathcal{R}$ gleichmäßig approximiert werden kann und der Bedingung (14) genügt, ist nach [3], Kor. 2 zu Satz 2, f Riemann-integrierbar. Hieraus folgt $\overline{\mathcal{K}} \subset \overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S}'$.

Sei umgekehrt $f \in \mathcal{S}'$. Aus [3], Satz 2, folgt: f gehört genau dann zu $\mathcal{S}'$, wenn f^+ und f^- zu $\mathcal{S}'$ gehören. Sei also o.B.d.A. $f \in \mathcal{S}'_+$. Aus $\mathcal{S}' \subset \overline{\mathcal{R}}$ folgt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists g, h \in \mathcal{R}_+ : g \leq f \leq h \wedge I(h - g) < \varepsilon.$$

Aus [3], Satz 2 u. Lemma 2, sowie aus der Verbandseigenschaft von $\mathcal{R}$ folgen die Existenz einer natürlichen Zahl n sowie einer Funktion $k_0 \in \mathcal{R}_0 : |f(x)| \leq n$ für alle $x \in X$ und $T_f \subset E(k_0)$. Dann gehören die Funktionen $h_0 = h \wedge nk_0$ sowie $g_0 = g \wedge nk_0$ zu $\mathcal{R}_0$ und es gilt: $g_0 \leq f \leq h_0$ sowie $I(h_0 - g_0) \leq I(h - g) < \varepsilon$. Also gilt $f \in \overline{\mathcal{R}_0}$. Aus $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{K}$ folgt aber $\overline{\mathcal{R}_0} \subset \overline{\mathcal{K}}$, folglich $f \in \overline{\mathcal{K}}$.

Die Gleichheit der Integrale $\mu(f)$ und $\overline{I}(f)$ ergibt sich aus der Übereinstimmung auf $\mathcal{R}_0$, der Eindeutigkeit der Fortsetzung auf $\mathcal{K}$ und weiter wegen Theor. 3 (i) auf $\mathcal{L}^1(\mu)$. Hiermit ist (ii) vollständig bewiesen.

Zum Beweis von (i) genügt es, zu bemerken, daß nach [3], Satz 2, die Teilmenge A von X genau dann I -quadrierbar ist, wenn 1_A zu $\mathcal{S}'(\mathcal{R}, I)$ gehört. $\swarrow$

3.5 Eingliederung der abstrakten Integrationstheorie von M.H. STONE

In 3.2 und 3.3 wurde gezeigt, daß die Integrationstheorie auf dem lokalbeschränkten Raum $(X, \mathcal{B})$ für jedes $\mathcal{G}$ -stetige bzw. $\mathcal{T}$ -stetige Maß μ dem ersten bzw. zweiten STONESchen Integrationsprozeß angewandt auf $(X, \mathcal{K}_{\mathcal{B}}, \mu)$ entspricht. Ähnlich

wie im vorigen Abschnitt läßt sich zeigen, daß auch hier die Umkehrung gilt (Satz 3.6).

Somit ist es auch in diesem Fall kein Verlust an Allgemeinheit, Maße stets auf lokalbeschränkten Räumen zu betrachten. Die Konkretisierung der abstrakten Integrationstheorie von STONE hat zudem den Vorteil, daß durch die zusätzliche Struktur auf dem "Meßraum" X präzisere Aussagen - insbesondere über Regularitätseigenschaften (vgl. Abschnitt 2.3) - als im abstrakten Fall gemacht werden können.

Ausgangspunkt der STONESchen Integrationstheorie ist bekanntlich wie bei LOOMIS ein Tripel $(X, \mathcal{R}, I)$ mit den Eigenschaften $(1^\circ) - (3^\circ)$ in 3.4 . Von I wird zusätzlich gefordert:

(M) Für jede aufsteigende Folge $(g_n) \subset \mathcal{R}$ mit $\sup g_n \in \mathcal{R}$ gilt:

$$I(\sup_n g_n) = \sup_n I(g_n)$$

bzw.

(M*) Für jedes aufst. filtr. System $H \subset \mathcal{R}$ mit $\sup H \in \mathcal{R}$ gilt:

$$I(\sup_{g \in H} g) = \sup_{g \in H} I(g) .$$

Wir setzen außerdem voraus, daß $\mathcal{R}$ den Bedingungen (12) und (13) genügt (dies kann stets durch Äquivalenzklassenbildung in X erreicht werden).

Für jeden Banachraum F und jede reelle Zahl $p \geq 1$ bezeichne:

(i) $\mathcal{L}_F^p(X, \mathcal{R}, I)$ den lokalkonvexen Raum aller im Sinne des ersten Stone-Integrals p -fach integrierbaren Abbildungen von X in F versehen mit der Halbnorm $\widetilde{N}_p$ (vgl. 3.2);

$L_F^p(X, \mathcal{R}, I)$ den $\mathcal{L}_F^p$ zugeordneten normierten Raum.

(ii) $\mathcal{L}_F^{p*}(X, \mathcal{R}, I)$ den lokalkonvexen Raum aller im Sinne des zweiten Stone-Integrals p -fach integrierbaren Abbildungen von X in F versehen mit der Halbnorm $\widetilde{N}_p^*$ (vgl. 3.3);

$L_F^{p*}(X, \mathcal{R}, I)$ den $\mathcal{L}_F^{p*}$ zugeordneten normierten Raum.

Es gilt der folgende Darstellungssatz:

Satz 3.6: Zu $(X, \mathcal{R}, I)$ mit den Eigenschaften $(1^\circ) - (3^\circ)$ existieren eindeutig ein lokalbeschränkter Raum $(X, \mathcal{B}_\mathcal{R})$ und ein positives Maß μ auf $(X, \mathcal{B}_\mathcal{R})$, derart daß gilt:

- (i) Genügt I der Bedingung (M) , so ist μ σ -stetig. Die lokalkonvexen Räume $\mathcal{L}_F^p(\mu)$ und $\mathcal{L}_F^p(X, \mathcal{R}, I)$ sowie die Banachräume $L_F^p(\mu)$ und $L_F^p(X, \mathcal{R}, I)$ sind identisch, und für jedes $f \in \mathcal{L}_F^p$ stimmen die Integrale überein.
- (ii) Genügt I der Bedingung (M^*) , so ist μ τ -stetig. Die lokalkonvexen Räume $\mathcal{L}_F^p(\mu)$ und $\mathcal{L}_F^{p*}(X, \mathcal{R}, I)$ sowie die Banachräume $L_F^p(\mu)$ und $L_F^{p*}(X, \mathcal{R}, I)$ sind identisch, und für jedes $f \in \mathcal{L}_F^p$ stimmen die Integrale überein.

Beweis:

Wie in 3.4 bezeichne $\mathcal{R}_0$ den Teilverband aller Funktionen aus $\mathcal{R}$, die der Bedingung (14) genügen. I_0 bezeichne die Restriktion von I auf $\mathcal{R}_0$. Von $(X, \mathcal{R}_0, I_0)$ leiten sich nach STONE ab: das Oberintegral $\bar{I}_0$, die Halbnormen $\tilde{N}_p^\circ$ sowie die Räume $\mathcal{F}_F^p(I_0)$, $\mathcal{L}_F^p(I_0)$ und $L_F^p(I_0)$. H. BAUER hat in [4] gezeigt, daß für jede positive numerische Funktion f auf X gilt $\bar{I}(f) = \bar{I}_0(f)$ und daß die Räume $\mathcal{F}_F^p(I_0)$, $\mathcal{L}_F^p(I_0)$ und $L_F^p(I_0)$ mit den jeweils entsprechenden Räumen $\mathcal{F}_F^p(I)$, $\mathcal{L}_F^p(I)$ und $L_F^p(I)$ übereinstimmen.

Der lokalbeschränkte Raum $(X, \mathcal{B}_\mathcal{R})$ sowie das Maß μ werden wie in 3.4 konstruiert. Da jede Funktion $g \in \mathcal{K} = \mathcal{K}(X, \mathcal{B}_\mathcal{R})$ durch Funktionen aus $\mathcal{R}_0$ gleichmäßig approximiert werden kann, stimmen die oberen Einhüllenden aller nicht endlichen aufst. filtr. Systeme in $\mathcal{R}_0$ und in $\mathcal{K}$ überein. Insbesondere gelten die Bedingungen (M) und (M^*) auch für die Fortsetzung von $I_0|_{\mathcal{R}_0}$ auf $\mathcal{K}$. Somit ist μ σ - bzw. τ -stetig, falls I der Bedingung

(M) bzw. (M*) genügt.

Aufgrund dieser Bemerkungen lassen sich nun die Aussagen (i) und (ii) völlig analog wie die entsprechenden Aussagen der Sätze 3.2 bzw. 3.3 beweisen. _/

§ 4 Charakterisierung der Stetigkeitseigenschaften der Maße auf einem lokalbeschränkten Raum

4.1 Die $\mathcal{B}$ -Kompaktifizierung eines lokalbeschränkten Raumes

H. BAUER hat in [3] und [4] gezeigt, daß zu jeder Menge X und zu jedem Vektorverband $\mathcal{R}$ von reellen Funktionen auf X mit den Eigenschaften (12) und (13) ein bis auf Homöomorphismen eindeutig bestimmter lokalkompakter Raum $X'_{\mathcal{R}}$ existiert mit den Eigenschaften:

- (i) X ist eine dichte Teilmenge von $X'_{\mathcal{R}}$;
- (ii) Jede Funktion $g \in \mathcal{R}$ kann auf genau eine Weise zu einer auf $X'_{\mathcal{R}}$ stetigen und im Unendlichen verschwindenden Funktion g' fortgesetzt werden;
- (iii) Die Menge $\mathcal{R}'$ der stetigen Fortsetzungen aller Funktionen $g \in \mathcal{R}$ besitzt auf $X'_{\mathcal{R}}$ die Eigenschaften (12) und (13);
- (iv) Die Funktion g_0 aus $\mathcal{R}$ genügt genau dann der Bedingung (14), wenn ihre stetige Fortsetzung auf $X'_{\mathcal{R}}$ einen kompakten Träger besitzt.

Konkretisiert man den "abstrakten" Ausgangspunkt $(X, \mathcal{R})$ des Satzes von BAUER durch Einführung der Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ sowie des Beschränkungssystems $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{R}_0)$, wie in 3.4 ausgeführt, so erhält man den folgenden "konkreten" Darstellungssatz:

Theorem 7 (BAUER [3],[4]; GOULD [15]): Zu jedem lokalbeschränkten Raum $(X, \mathcal{B})$ existiert ein lokalkompakter Raum $X'_{\mathcal{B}}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1°) X ist ein dichter Unterraum von $X'_{\mathcal{B}}$;
- (2°) Jede Funktion $g \in \mathcal{K}(X, \mathcal{B})$ läßt sich auf genau eine Weise zu einer Funktion g' des Ringes $\mathcal{K}(X'_{\mathcal{B}})$ aller stetigen reellen Funktionen mit kompaktem Träger auf $X'_{\mathcal{B}}$ fortsetzen. Die Ringe $\mathcal{K}(X, \mathcal{B})$ und $\mathcal{K}(X'_{\mathcal{B}})$ sind isomorph;

(3°) Eine Teilmenge von $(X, \mathcal{B})$ ist genau dann beschränkt, wenn ihr Abschluß in $X'_\mathcal{B}$ kompakt ist.

Durch die Eigenschaften (1°) - (3°) ist $X'_\mathcal{B}$ bis auf Homöomorphismen, die X punktweise festlassen, eindeutig bestimmt.

1. Beweisskizze (nach H. BAUER [3]): $\overline{\mathcal{K}_\mathcal{B}}$ bezeichne die Menge aller reellen Funktionen auf X , die durch Funktionen aus dem Ring $\mathcal{K}_\mathcal{B}$ gleichmäßig approximiert werden können. Dann ist die Menge $\mathcal{O} := \{ f \in \mathbb{R}^X : f = \alpha + \bar{g}, \bar{g} \in \overline{\mathcal{K}_\mathcal{B}}, \alpha \in \mathbb{R} \}$ eine hinsichtlich gleichmäßiger Konvergenz abgeschlossene Algebra mit Einheit. $\hat{X}_\mathcal{O}$ sei der Raum der maximalen Ideale von $\mathcal{O}$ nach GELFAND-ŠILOV [11]. Das System $(\overline{z(g)})_{g \in \mathcal{K}_\mathcal{B}}$ hat entweder einen leeren Durchschnitt, falls $(X, \mathcal{B})$ beschränkt ist, oder ist Umgebungsbasis eines eindeutig bestimmten Punktes $\omega \in \hat{X}_\mathcal{O}$. Der Raum

$$X'_\mathcal{B} := \hat{X}_\mathcal{O} \setminus \bigcap_{g \in \mathcal{K}_\mathcal{B}} \overline{z(g)}$$

besitzt die zitierten Eigenschaften.

2. Beweisskizze: $X'_\mathcal{B}$ läßt sich auch direkt mit Hilfe der maximalen Ideale von $\mathcal{K}_\mathcal{B}$ konstruieren. Und zwar versee man die Menge $\mathcal{M}$ aller maximalen Ideale von $\mathcal{K}_\mathcal{B}$ mit der STONESchen "Hüllen-Kern-Topologie" $\mathcal{T}_{hk}$ (siehe z.B. [12], 7M); d.h. mit der Topologie, für die die Mengen

$$A(f) = \{ M \in \mathcal{M} : f \in M \} \quad (f \in \mathcal{K}_\mathcal{B})$$

eine abgeschlossene Basis bilden. Die Konstruktion verläuft dann weitgehend analog zu der des STONESchen Strukturraumes $\mathcal{M}_A$ eines kommutativen Ringes A mit Einheit ([12], 7M). Anstelle der fehlenden Einheit in $\mathcal{K}_\mathcal{B}$ treten dabei die "lokalen Einheiten" [15]. Analog wie man mit Hilfe der Eins in A die Kompaktheit von $\mathcal{M}_A$ zeigt, beweist man mit Hilfe der Lokalen

Einheiten die Lokalkompaktheit von $\mathcal{M}$. Die restlichen Überlegungen verlaufen dann ähnlich wie bei GELFAND-ŠILOV [11]. Da der Raum $(\mathcal{M}, \tau_{hk})$ die Eigenschaften $(1^\circ) - (3^\circ)$ besitzt, ist er wegen der Eindeutigkeit der Existenz dem oben konstruierten Raum X'_B homöomorph. $\swarrow$

Bemerkung:

- (i) X'_B ist derjenige B -kompakte Raum (siehe 5.1), in den X $\mathcal{K}_B$ -einbettbar ist. Deshalb wird X'_B i.f. auch als die B -Kompaktifizierung von (X, B) bezeichnet.
- (ii) Ist (X, B) beschränkt, so ist wegen $\mathcal{K}(X, B) = \mathcal{L}_b(X)$ $\mathcal{M}$ der Raum der maximalen Ideale von $\mathcal{L}_b(X)$, und somit fällt die B -Kompaktifizierung von (X, B) in diesem Fall mit der Stone-Čech-Kompaktifizierung zusammen (vgl. [15]).
- (iii) Ist (X, B) lokalkompakt (und damit nach 5.1 B -kompakt), so ist $X = X'_B$.

4.2 Charakterisierung der Stetigkeit von Maßen mit Hilfe des Darstellungssatzes

$(X, \mathcal{B})$ bezeichne wie üblich einen lokalbeschränkten Raum und $X'_{\mathcal{B}}$ seine $\mathcal{B}$ -Kompaktifizierung nach 4.1. Für jedes $g \in \mathcal{K}(X, \mathcal{B})$ sei $g' \in \mathcal{K}(X'_{\mathcal{B}})$ die stetige Fortsetzung von g auf $X'_{\mathcal{B}}$. Da die Ringe $\mathcal{K}(X, \mathcal{B})$ und $\mathcal{K}(X'_{\mathcal{B}})$ algebraisch und verbandstheoretisch isomorph sind, sind auch ihre ordnungstheoretischen Dualräume $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ und $\mathcal{M}(X'_{\mathcal{B}})$ isomorph; und zwar ist die Abbildung $\vartheta(\mu) = \mu'$ definiert durch

$$\mu'(g') := \mu(g) \quad (g \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}})$$

ein Isomorphismus von $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ auf $\mathcal{M}(X'_{\mathcal{B}})$ (vgl. [4]).

Für jedes $\mu \in \mathcal{M}(X'_{\mathcal{B}})$ sei $(X', \mathcal{L}'_{\mu}, \mu')$ der n. Satz 2.10 zu μ' gehörende vollständige Maßraum. Da $X'_{\mathcal{B}}$ lokalkompakt ist, ist jedes Maß μ' auf $X'_{\mathcal{B}}$ ein Radonmaß und somit τ -stetig. Nach Satz 2.10 enthält daher $\mathcal{L}'_{\mu}$ die Borelmengen $\mathcal{L}'$ und erst recht die Baireschen Mengen $\mathcal{L}'_0$ von $X'_{\mathcal{B}}$. Die Restriktion von μ' auf $\mathcal{L}'$ bzw. $\mathcal{L}'_0$ ist somit ein Borelmaß bzw. ein Bairesches Maß auf $X'_{\mathcal{B}}$ im Sinne von HALMOS [16]. Zwischen den Baireschen Mengen $\mathcal{L}_0$ bzw. den Borelmengen $\mathcal{L}$ von $(X, \mathcal{B})$ und $\mathcal{L}'_0$ bzw. $\mathcal{L}'$ bestehen nach GOULD [15] folgende Beziehungen:

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}'_0 \cap X \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}' \cap X.$$

In diesem Abschnitt sollen die Beziehungen zwischen den Maßen auf $(X, \mathcal{B})$ und den entsprechenden Maßen auf $X'_{\mathcal{B}}$ untersucht

und mit ihrer Hilfe die Stetigkeitseigenschaften der Maße auf $(X, \mathcal{B})$ charakterisiert werden. Spezialfälle der folgenden Ergebnisse sind die Charakterisierungssätze von BAUER [2], LE CAM [24] und KNOWLES [20]. Wir folgen der letzteren Darstellung und lösen zugleich das von KNOWLES aufgeworfene Problem, wie die Charakterisierungssätze für nicht endliche Maße verallgemeinert werden können.

Hierfür erweist sich folgende Begriffsbildung von HALMOS als nützlich:

Definition 4.1: (HALMOS [16], p. 74) Eine Teilmenge X_0 eines Maßraumes $(X, \mathcal{F}, \mu)$ heißt μ -dicht (" μ -thick") in X , wenn für alle $S \in \mathcal{F}$ gilt $\mu_*(S \setminus X_0) = 0$.

Theorem (5): Für jedes $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $\mu \in \mathcal{M}^{\sigma}(X, \mathcal{B})$.
- (ii) X ist μ'_0 -dicht in $(X'_0, \mathcal{K}'_0)$.
- (iii) $\mu'_0(B'_0) = 0$ für jede Bairesche Menge $B'_0 \subset X'_0 \setminus X$.
- (iv) $\mu'_0(K'_0) = 0$ für jede kompakte G_δ -Menge $K'_0 \subset X'_0 \setminus X$.

Beweis: Aufgrund des Satzes 1.5 genügt es, die Behauptung für $\mu \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$ zu beweisen. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt unmittelbar aus Def. 4.1. Die Äquivalenz von (iii) und (iv) folgt aus der Regularität von μ'_0 (Satz 2.8). Somit bleibt zu zeigen:

(i) $\longrightarrow$ (iv): Sei K'_0 eine kompakte G_δ -Menge in $X'_0 \setminus X$. Dann existiert eine fallende Folge $(g'_n) \subset \mathcal{K}(X')$ mit $g'_n \searrow 1_{K'_0}$. Für die Restriktionen $g_n = g'_n|_X \in \mathcal{K}$ gilt somit $g_n \searrow 0$. Hieraus folgt aber n. Vor.

$$\mu'_0(K'_0) = \lim_n \mu'(g'_n) = \lim_n \mu(g_n) = 0.$$

(iii) $\longrightarrow$ (i): Sei $(g_n) \subset \mathcal{K}_+$ eine fallende Folge mit $g_n \searrow 0$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gehören die Mengen $B'_n = [g_n \geq \varepsilon]$ zu $\mathcal{L}'_0$. Die Menge $B' = \bigcap_n B'_n$ ist somit eine Bairesche Menge in X' , die wegen $g_n \searrow 0$ in $X' \setminus X$ enthalten ist. Somit gilt n. Vor.

$$\lim_n \mu'_0(B'_n) = \mu'_0(B') = 0.$$

Da (g'_n) eine fallende Folge in $\mathcal{K}(X')$ ist, existiert eine Bairesche Menge B'_0 in X' mit $T_{g'_n} \subset B'_0$ für alle n und $\mu'_0(B'_0) < \infty$. Somit gilt

$$g'_n \leq \|g_1\| \cdot 1_{B'_n} + \varepsilon \cdot 1_{B'_0 \setminus B'_n}$$

Hieraus folgt

$$\mu(g_n) = \mu'(g'_n) \leq \|g_1\| \cdot \mu'_0(B'_n) + \varepsilon \cdot \mu'_0(B'_0). \quad \checkmark$$

Bei der folgenden Charakterisierung der τ -stetigen Maße verlagert sich das Interesse von den Baireschen auf $X'_{\mathbb{B}}$ auf die Borelschen Maße. Es gilt:

Theorem (τ): Für jedes $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathbb{B})$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $\mu \in \mathcal{M}^\tau(X, \mathbb{B})$.
- (ii) X ist μ' -dicht in $(X'_{\mathbb{B}}, \mathcal{L}')$.
- (iii) $\mu'(B') = 0$ für jede Borelmenge $B' \subset X'_{\mathbb{B}} \setminus X$.
- (iv) $\mu'(K') = 0$ für jede kompakte Menge $K' \subset X'_{\mathbb{B}} \setminus X$.

Beweis: Die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt wiederum unmittelbar aus Def. 4.1. Die Äquivalenz von (iii) und (iv) folgt aus der Tatsache, daß jedes Maß μ' auf dem lokalkompakten Raum $X'_{\mathbb{B}}$ straff und somit das zugehörige Borelmaß $\mu' \ll \mathcal{L}'$ n. Satz 2.10 (iii) kompakt-regulär ist. Der Rest des Beweises verläuft analog zu dem des vorigen Satzes, indem man überall Folgen durch gefilterte Systeme und "Bairesch" durch

"Borelsch" ersetzt und beachtet, daß der beliebige Durchschnitt der Mengen $B'_\alpha = [g'_\alpha \geq \varepsilon]$ kompakt und somit borelsch ist. /

Theorem (t): Folgende Aussagen sind äquivalent für jedes

$$\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B}):$$

(i) $\mu \in \mathcal{M}^t(X, \mathcal{B})$.

(ii) Zu jeder relativ kompakten offenen Menge $U' \subset X|_{\mathcal{B}}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Menge $K \subset X$ mit $\mu'(U' \setminus K) \leq \varepsilon$.

(iii) X ist μ' -dicht und μ' -meßbar (im Sinne von BOURBAKI⁺) in $X|_{\mathcal{B}}$.

Beweis: (i) $\rightarrow$ (ii): N. Theor. 7 ist die Menge $U' \cap X$ offen und beschränkt in X . Aus Axiom (B3) und der Straffheit von μ folgt die Existenz einer Menge $B \in \mathcal{B}$ mit $U = U' \cap X \subset B$, derart daß gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ kp. } K \subset B \quad \forall g \in \Sigma_B : g|_K = 0 \leadsto |\mu(g)| < \varepsilon.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \mu'(U' \setminus K) &= \sup \{ \mu'(g') : g' \leq 1_{U' \setminus K}, g' \in \mathcal{K}(X|_{\mathcal{B}}) \} \\ &= \sup \{ \mu(g) : g \leq 1_{U' \setminus K}, g \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}} \} \\ &= \sup \{ \mu(g) : g \in \Sigma_B, g|_K = 0 \} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) $\rightarrow$ (iii): Sei K' kp. $\subset X'$ und U' eine relativ kompakte offene Menge, die $K' \setminus X$ enthält. N. Vor. existiert zu $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset X$ mit $\mu'(U' \setminus K) \leq \varepsilon$. Die Funktion $1_{U' \setminus K}$ ist nach unten halbstetig und gehört somit zu $\mathcal{U}^{\mu'}$. Somit folgt $0 \leq 1_{K' \setminus X} \leq 1_{U' \setminus K}$ mit $\mu'(1_{U' \setminus K}) \leq \varepsilon$. Also ist die Menge $(X' \setminus X) \cap K' = K' \cap X$ n. Theor. 3 (iii) μ' -integrierbar für alle kompakten Teilmengen K' von X' . Daraus folgt aber nach [7], p. 170/77, die μ' -Meßbarkeit von X .

⁺) Vgl. die Bemerkung über Meßbarkeit am Schluß des Abschn. 2.2.

Hiermit ist gleichzeitig gezeigt, daß für jede kompakte Menge $K' \subset X' \setminus X$ gilt: $\mu'(K') = \mu'(K' \setminus X) = 0$. Also ist n. Theor. $(\tau) X$ μ' -dicht in X'_B .

(iii) $\longrightarrow$ (i): Sei $B \in \mathcal{B}$ und $(g_\alpha)_{\alpha \in A} \subset \sum_B$ ein System, das gleichmäßig auf den kompakten Teilmengen von B gegen Null strebt. Aus (iii) sowie der Regularität von μ' (Satz 2.10) folgt: $\mu'(\bar{B}) = \mu'(\bar{B} \cap X) = \mu'(B) = \sup\{\mu'(K) : K \text{ kp} \subset B\}$. Somit existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset B$ sowie ein $\alpha_0 \in A$, derart daß gilt $\mu'(\bar{B} \setminus K) < \varepsilon$ sowie

$$|g_\alpha(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in K \quad \forall \alpha_0 < \alpha.$$

Für die stetigen Fortsetzungen g' auf X'_B gilt somit:

$$g'_\alpha \leq \varepsilon \cdot 1_K + 1_{\bar{B} \setminus K} \quad \forall \alpha_0 < \alpha$$

Hieraus folgt

$$\mu(g_\alpha) = \mu'(g'_\alpha) \leq \varepsilon \cdot \mu'(K) + \mu'(\bar{B} \setminus K) < \varepsilon \cdot (\mu'(K) + 1). \quad _$$

Aufgrund der Isomorphie von $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ und $\mathcal{M}(X'_B)$ folgt unmittelbar aus obigem Theorem:

Korollar: Es gilt $\mathcal{M}^T(X, \mathcal{B}) = \mathcal{M}^t(X, \mathcal{B})$ genau dann, wenn X universell meßbar ist in X'_B .

§ 5 Struktur eines lokalbeschränkten Raumes und
 Stetigkeit seiner Maße

Bekanntlich hat die Topologie eines topologischen Maßraumes Auswirkungen auf die Stetigkeitseigenschaften seiner Maße. Ein bekanntes Resultat dieser Art besagt z.B., daß jedes (σ -additive) Maß auf einem polnischen Raum straff ist (siehe etwa [19], [27]). Doch schon die Tatsache, daß jedes Radonmaß auf einem lokalkompakten Raum straff ist, läßt sich nicht mehr alleine durch die Topologie von X erklären. Es gibt nämlich auf lokalkompakten und nicht σ -kompakten Räumen nach [30] nicht reguläre Bairesche Maße, die somit nicht straff sein können. Bei der Straffheit der Radonmaße spielt vielmehr neben der Topologie von X das Beschränkungssystem $\mathcal{B}$ der kompakten Mengen von X eine wesentliche Rolle. M.a.W.: Die Straffheit der Radonmaße ist eine Struktureigenschaft des lokalbeschränkten Raumes $(X, \mathcal{B})$.

Umgekehrt lassen sich gewisse topologische Räume, wie z.B. die kompakten und pseudokompakten Räume, durch die Stetigkeitseigenschaften ihrer Maße charakterisieren [13], [35]. Da die Maße auf einem lokalbeschränkten Raum $(X, \mathcal{B})$ wesentlich von dem Beschränkungssystem $\mathcal{B}$ abhängen, hängen Struktursätze dieser Art ebenfalls neben der Topologie von X notwendig von $\mathcal{B}$ ab, was auf Begriffe wie $\mathcal{B}$ -Kompaktheit etc. führt, die im nächsten Abschnitt eingeführt werden.

5.1 Verschiedene Kompaktheitsbegriffe in lokalbeschränkten
 Räumen

$(X, \mathcal{B})$ bezeichne wie üblich einen lokalbeschränkten Raum. Mit $\tilde{\mathcal{K}}(X, \mathcal{B})$ oder kurz $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}}$ werde der Ring aller stetigen reellen (nicht notwendig beschränkten) Funktionen auf X

mit beschränktem Träger bezeichnet. Als natürliche Topologie auf $\tilde{\mathcal{K}}(X, \mathcal{B})$ betrachten wir stets die in 1.4 definierte Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^c$ der $\mathcal{B}$ -kompakten Konvergenz. Der bisher betrachtete Ring $\mathcal{K}(X, \mathcal{B})$ ist somit der Teilring aller beschränkten Funktionen aus $\tilde{\mathcal{K}}(X, \mathcal{B})$.

Nach GILLMAN-JERISON [12] heißt ein Ideal I in einem Ring $\mathcal{R}$ von reellen Funktionen auf X fixiert, wenn ein $x \in X$ existiert mit $f(x) = 0$ für alle $f \in I$. Ein maximales Ideal M in $\mathcal{R}$ heißt reell, wenn $\mathcal{R}/M$ isomorph zu $\mathbb{R}$ ist.

Definition 5.1: Der lokalbeschränkte Raum $(X, \mathcal{B})$ heißt:

- (a) $\mathcal{B}$ -kompakt $\xLeftrightarrow[\text{d.f.}]{}$ Jedes maximale Ideal in $\mathcal{K}(X, \mathcal{B})$ ist fixiert
- (b) $\mathcal{B}$ -pseudokompakt $\xLeftrightarrow[\text{d.f.}]{}$ $\tilde{\mathcal{K}}(X, \mathcal{B}) = \mathcal{K}(X, \mathcal{B})$
- (c) $\mathcal{B}$ -reellkompakt $\xLeftrightarrow[\text{d.f.}]{}$ Jedes reelle maximale Ideal in $\tilde{\mathcal{K}}(X, \mathcal{B})$ (GOULD [15]) ist fixiert

Beispiel 3: Nach GOULD [15], p. 233, ist jedes maximale Ideal in dem $\mathcal{K}(X)$ aller stetigen reellen Funktionen mit kompaktem Träger auf einem lokalkompakten Raum X fixiert. Somit ist jeder lokalkompakte Raum $(X, \mathcal{B})$ $\mathcal{B}$ -kompakt. In Satz 5.1 wird gezeigt, daß auch die Umkehrung gilt.

Bemerkung: Ist $(X, \mathcal{B})$ beschränkt und gilt somit $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}} = \mathcal{C}(X)$ sowie $\mathcal{K}_{\mathcal{B}} = \mathcal{C}_b(X)$, so fallen die obigen Definitionen mit den üblichen Definitionen von Kompaktheit etc. zusammen (vgl. [12]). In diesem Fall kann man somit i.f. überall das Präfix " $\mathcal{B}$ " fortlassen.

Satz 5.1: Für jeden lokalbeschränkten Raum $(X, \mathcal{B})$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) X ist $\mathcal{B}$ -kompakt.
- (ii) $X = X'_{\mathcal{B}}$.
- (iii) Jede beschränkte Teilmenge von $(X, \mathcal{B})$ ist relativ kompakt.
- (iv) X ist $\mathcal{B}$ -pseudokompakt und $\mathcal{B}$ -reellkompakt.

Beweis: (i) $\longrightarrow$ (ii): N. Theor. 7 ist $X'_{\mathcal{B}}$ homöomorph zur Menge $\mathcal{M}$ der maximalen Ideale von $\mathcal{K}(X, \mathcal{B})$ versehen mit der STONESchen Topologie $\mathcal{T}_{hk}$. Da aber nach Definition der $\mathcal{B}$ -Kompaktheit jedes $M \in \mathcal{M}$ fixiert ist, gilt somit $X'_{\mathcal{B}} \hat{=} \mathcal{M} \hat{=} X$.

(ii) $\longrightarrow$ (iii): N. Theor. 7 (3^0) ist für jede beschränkte Teilmenge A von $(X, \mathcal{B})$ $\overline{A}$ kompakt in $X'_{\mathcal{B}} = X$.

(iii) $\longrightarrow$ (iv): Für jede Funktion $f \in \tilde{\mathcal{K}}(X, \mathcal{B})$ ist T_f abgeschlossen und beschränkt in $(X, \mathcal{B})$, also n.Vor. kompakt.

Somit gilt $\tilde{\mathcal{K}}(X, \mathcal{B}) = \mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X, \mathcal{B})$, wobei $\mathcal{K}(X)$ den Ring der stetigen reellen Funktionen auf X mit kompaktem Träger bezeichnet. Nach [15], p. 233, ist aber jedes maximale Ideal in $\mathcal{K}(X)$ fixiert. Somit ist X $\mathcal{B}$ -reellkompakt und wegen $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}} = \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ $\mathcal{B}$ -pseudokompakt.

(iv) $\longrightarrow$ (i): N. Vor. ist jedes reelle maximale Ideal in $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}} = \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ fixiert. Die maximalen Ideale in $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ sind aber sämtlich reell. Somit ist X $\mathcal{B}$ -kompakt. $_$

Nach Theorem 7 existiert zu jedem lokalbeschränkten Raum $(X, \mathcal{B})$ ein $\mathcal{B}$ -kompakter Raum, in den X $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ -einbettbar ist. GOULD hat in [15] gezeigt, daß zu jedem lokalbeschränkten Raum außerdem ein $\mathcal{B}$ -reellkompakter Raum $\nu_{\mathcal{B}} X$ existiert, in den X $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}}$ -einbettbar ist. $\nu_{\mathcal{B}} X$ ist isomorph zur Menge $\mathcal{M}_r(\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}})$ aller reellen maximalen Ideale in $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}}$. Aufgrund der Beziehungen

$$\nu_{\mathcal{B}} X \hat{=} \mathcal{M}_r(\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}}) \subset \mathcal{M}(\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}}) \hat{=} \mathcal{M}(\mathcal{K}_{\mathcal{B}}) \hat{=} X'_{\mathcal{B}}$$

kann $\nu_{\mathcal{B}} X$ mit einem dichten Teilraum von $X'_{\mathcal{B}}$ identifiziert werden. Macht man diese Identifizierung, so besteht folgender Zusammenhang zwischen $X'_{\mathcal{B}}$ und $\nu_{\mathcal{B}} X$: Für jedes $f \in \widetilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}}$ aufgefaßt als Abbildung in den kompakten Raum $\overline{\mathbb{R}}$ bezeichne $\bar{f}$ die eindeutig bestimmte stetige (nicht notwendig endliche) Fortsetzung von f auf $X'_{\mathcal{B}}$. Dann gilt:

$$(16) \quad \nu_{\mathcal{B}} X = \{ x \in X'_{\mathcal{B}} : |\bar{f}(x)| < \infty \quad \forall f \in \widetilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}} \}$$

5.2 Einige Struktursätze

Der folgende Satz gibt eine hinreichende Bedingung dafür, daß jedes $\bar{\sigma}$ -stetige Maß auf einem lokalbeschränkten Raum $\mathcal{T}$ -stetig ist. Diese Bedingung ist für beschränkte Räume wohlbekannt ([27], [35]). Die Bedeutung des Satzes 5.2 beruht jedoch darin, daß die Bedingung unabhängig ist von dem Beschränkungssystem $\mathcal{B}$. Da die Sätze von GO-DIN HU und KNOWLES (siehe 5.4) falsch sind, ist es u.W. immer noch ein ungelöstes Problem, ob die Bedingung auch notwendig ist.

Satz 5.2: Ist X ein vollständig regulärer Lindelöf-Raum, so gilt $\mathcal{M}^{\bar{\sigma}}(X, \mathcal{B}) = \mathcal{M}^{\tau}(X, \mathcal{B})$ für jedes Beschränkungssystem $\mathcal{B}$ auf X .

Beweis: Sei $\mathcal{B}$ ein beliebiges Beschränkungssystem auf X und K' eine kompakte Menge in $X'_{\mathcal{B}} \setminus X$. Nach den Theoremen (5) und (7) ist die Behauptung bewiesen, falls eine kompakte z -Menge $Z' \subset X'_{\mathcal{B}} \setminus X$ existiert, die K' enthält. Ist dies nicht der Fall, so ist

$$\mathcal{F} = (Z' \cap X)_{K' \cap Z'}$$

ein z -Filter auf X , dessen abzählbare Durchschnitte nicht leer sind. Da X ein Lindelöf-Raum ist, ist dann aber $\mathcal{F}$ nach [12], 8H, fixiert, d.h. $\bigcap \mathcal{F} = K' \cap X \neq \emptyset$ im Widerspruch z. Vor. $_$

Der Satz 5.2 gilt insbesondere für jeden $\bar{\sigma}$ -kompakten und jeden separablen metrischen Raum.

Die folgenden Sätze liefern eine maßtheoretische Kennzeichnung der $\mathbb{B}$ -kompakten und $\mathbb{B}$ -pseudokompakten lokalbeschränkten Räume. Ist $(X, \mathbb{B})$ speziell beschränkt, so erhält man die klassischen Sätze von ALEXANDROFF-GLICKSBERG [13], [35].

Satz 5.3: Der lokalbeschränkte Raum $(X, \mathbb{B})$ ist genau dann $\mathbb{B}$ -kompakt, wenn gilt $\mathcal{M}(X, \mathbb{B}) = \mathcal{M}^t(X, \mathbb{B})$.

Beweis: Aus Satz 5.1 (ii) und Theorem (t) folgt unmittelbar die Notwendigkeit der Bedingung. Ist umgekehrt X nicht $\mathbb{B}$ -kompakt, so existiert n. Satz 5.1 (ii) ein Punkt $x_0 \in X'_{\mathbb{B}} \setminus X$. Für das Maß $\mu(g) := g'(x_0)$ ($g \in \mathcal{H}_{\mathbb{B}}$) folgt dann nach Theor. (t):

$$0 = \mu'(\{x_0\} \setminus X) = \mu'(\{x_0\}) = \delta_{x_0}(\{x_0\}) = 1 \quad \text{.} \quad \text{—/}$$

Betrachtet man die Theorie der Radonmaße auf lokalkompakten Räumen nach BOURBAKI von dem übergeordneten Standpunkt der Maßtheorie auf lokalbeschränkten Räumen, so zeigt der soeben bewiesene Satz, daß die Radonmaße einen wichtigen Spezialfall innerhalb dieser Theorie darstellen. Nach Satz 5.1 sind nämlich die lokalkompakten Räume (mit den kompakten Mengen als Beschränkungssystem) genau die $\mathbb{B}$ -kompakten Räume. Diese sind aber nach Satz 5.3 genau diejenigen Räume, auf denen jedes Maß straff ist. Somit ist die Theorie der Radonmaße nach BOURBAKI die allgemeinste Maßtheorie mit dieser Eigenschaft.

Satz 5.4: Der lokalbeschränkte Raum $(X, \mathbb{B})$ ist genau dann $\mathbb{B}$ -pseudokompakt, wenn gilt $\mathcal{M}(X, \mathbb{B}) = \mathcal{M}^6(X, \mathbb{B})$.

Der Beweis des Satzes 5.4 folgt unmittelbar aus dem folgenden Lemma sowie aus Theorem (5).

Für jedes $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ bezeichne $\mathcal{T}_\mu$ den Trägerfilter sowie T_μ den Träger von μ , falls dieser existiert (siehe 1.5). $T_{\mu'}$ sei der Träger des zu μ gehörenden Maßes auf $X'_\mathcal{B}$. Da jedes Maß auf $X'_\mathcal{B}$ nach Satz 5.3 straff ist, folgt aus Satz 1.6 die Existenz von $T_{\mu'}$. Zwischen dem Trägerfilter $\mathcal{T}_\mu$ und $T_{\mu'}$ besteht folgender Zusammenhang:

Satz 5.5: Die Menge $Z \in \mathcal{Z}(\mathcal{K})$ gehört genau dann zu $\mathcal{T}_\mu$, wenn ihr Abschluß in $X'_\mathcal{B}$ den Träger $T_{\mu'}$ enthält.

Beweis: Sei $Z \in \mathcal{T}_\mu$. Da $X'_\mathcal{B}$ lokalkompakt ist, existiert zu jedem Punkt $x_0 \notin \bar{Z}$ eine kompakte Umgebung V' von x_0 mit $V' \cap \bar{Z} = \emptyset$. Für jedes $g' \in \mathcal{K}(X'_\mathcal{B}, V')$ gehört die Restriktion $g = g'|_X$ zu $\mathcal{K}_\mathcal{B}$ und verschwindet auf Z . Somit gilt $\mu'(g') = \mu(g) = 0$. Also folgt aus Satz 1.7 $x_0 \notin T_{\mu'}$.

Sei umgekehrt $T_{\mu'} \subset \bar{Z}$. Dann gilt für jedes $g \in \mathcal{K}_\mathcal{B}$ mit $g|_Z = 0$: $g'|_{\bar{Z}} = 0$. N. Satz 1.8 folgt hieraus aber: $|\mu'|(|g'|) = |\mu|(|g|) = 0$. Also gilt $Z \in \mathcal{T}_\mu$. $\square$

Korollar 1: Der Punkt $x_0 \in X'_\mathcal{B}$ gehört genau dann zu $T_{\mu'}$, wenn x_0 Adhärenzpunkt von $\mathcal{T}_\mu$ ist.

Beweis: Da das System $\overline{\mathcal{Z}}$ eine abgeschlossene Basis von $X'_\mathcal{B}$ bildet, gilt:

$$T_{\mu'} = \bigcap_{T_{\mu'} \subset \bar{Z}} \bar{Z} = \bigcap_{Z \in \mathcal{T}_\mu} \bar{Z} . \quad \square$$

Korollar 2: $\mathcal{T}_\mu$ ist genau dann ein z-Filter [12] auf X , wenn μ nicht das Nullmaß ist.

Beweis: (i): Nach [15], p. 229, gilt für $Z_i, Z_j \in \mathcal{Z}(\mathcal{K})$: $\bar{Z}_i \cap \bar{Z}_j = \overline{Z_i \cap Z_j}$. Für $Z_i, Z_j \in \mathcal{T}_\mu$ folgt daher aus Satz 5.5: $T_{\mu'} \subset \bar{Z}_i \cap \bar{Z}_j = \overline{Z_i \cap Z_j}$. Somit $Z_i \cap Z_j \in \mathcal{T}_\mu$. (ii): Für $Z \in \mathcal{T}_\mu$ und $Z \subset Z'$ folgt n. Satz 5.5: $T_{\mu'} \subset \bar{Z} \subset \bar{Z}'$. Somit $Z' \in \mathcal{T}_\mu$.

Die Behauptung folgt nun aus der leicht einzusehenden Tatsache: $\mu = 0 \iff \emptyset \in \mathcal{T}_\mu$. $\square$

Korollar 3: Existiert der Träger T_μ von μ , so gilt $T_\mu = T_{\mu'} \cap X$.

Beweis: Aus Kor. 1 folgt: $T_{\mu'} \cap X = \left(\bigcap_{Z \in \mathcal{T}_{\mu'}} \bar{Z} \right) \cap X = \bigcap_{Z \in \mathcal{T}_\mu} Z = T_\mu$. $\square$

Definition 5.2: Der Trägerfilter $\mathcal{T}_\mu$ eines Maßes μ auf $(X, \mathcal{B})$ heißt $\mathcal{B}$ -pseudokompakt genau dann, wenn für alle $g \in \tilde{\mathcal{K}}(X, \mathcal{B})$ ein $Z \in \mathcal{T}_\mu$ existiert, so daß die Funktion g auf Z beschränkt ist. $\mathcal{M}_0(X, \mathcal{B})$ bezeichne die Menge aller $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$, deren Trägerfilter $\mathcal{B}$ -pseudokompakt ist.

Theorem 8: Für jedes $\mu \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{B})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) μ ist fortsetzbar zu einer positiven Linearform auf $\tilde{\mathcal{K}}(X, \mathcal{B})$.
- (ii) $\mathcal{T}_\mu$ ist $\mathcal{B}$ -pseudokompakt.
- (iii) $T_{\mu'} \subset \nu_{\mathcal{B}} X$.

Beweis: (i) $\rightarrow$ (ii): $\tilde{\mu}$ bezeichne die Fortsetzung von μ auf $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}}$. Für jede Funktion $g \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}}$ existiert nach [15], p. 239, eine natürliche Zahl $n = n(g)$, derart daß gilt $\tilde{\mu}((|g| - n)^+) = 0$. Somit gilt für die Funktion $h_0 := (|g| - n)^+ \wedge 1 \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ erst recht $\mu(h_0) = 0$. Für die stetige Fortsetzung h'_0 auf $X'_{\mathcal{B}}$ gilt dann: $h'_0 = (|g'| - n)^+ \wedge 1 \in \mathcal{K}_+(X'_{\mathcal{B}})$ und $\mu'(h'_0) = 0$. Hieraus folgt nach [7], p. 69:

$$T_{\mu'} \subset Z'(h'_0) = [|g'| \leq n] \subset \overline{[|g| \leq n + 1]} .$$

Also gehört nach Satz 5.5 die z -Menge $[|g| \leq n + 1]$ zu $\mathcal{T}_{\mu}$.

(ii) $\rightarrow$ (iii): Sei $x_0 \in X'_{\mathcal{B}} \setminus \nu_{\mathcal{B}} X$. Dann existiert nach (16) ein $f \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}}$ mit $|\bar{f}(x_0)| = \infty$. N. Vor. existieren aber ein

$Z \in \mathcal{T}_\mu$ und eine natürliche Zahl n mit $|f(x)| \leq n$ für alle $x \in Z$. Somit gilt für die stetige Fortsetzung $\bar{f}$ von f auf $X'_\mathbb{B}$: $|\bar{f}(x)| \leq n$ für alle $x \in \bar{Z}$. Folglich ist $x_0 \notin \bar{Z}$ und somit n. Kor. 1 zu Satz 5.5 $x_0 \notin T_\mu$.

(iii) $\rightarrow$ (i): Sei $f \in \tilde{\mathcal{K}}_\mathbb{B}$ und $\bar{f}$ die stetige Fortsetzung von f auf $X'_\mathbb{B}$. Da T_f beschränkt, ist $T_{\bar{f}}$ n. Theor. 7 (3°) kompakt und somit ebenfalls die Menge $K' = T_{\bar{f}} \cap T_\mu$. N. Vor. liegt K' in $\mathcal{V}_\mathbb{B} X$. Da die Restriktion von $\bar{f}$ auf $\mathcal{V}_\mathbb{B} X$ nach (16) reell ist, ist somit $\bar{f}|_{K'}$ beschränkt. Somit ist wegen

$$|\mu'(\bar{f})| \leq \int_{X'_\mathbb{B}} |\bar{f}| d\mu' = \int_{K'} |\bar{f}| d\mu' \leq \|\bar{f}\|_{K'} \cdot \mu'(K') < \infty$$

$\bar{f}$ μ' -integrierbar und $\tilde{\mu}(f) := \mu'(\bar{f})$ ($f \in \tilde{\mathcal{K}}_\mathbb{B}$) eine positive Fortsetzung von μ auf $\tilde{\mathcal{K}}_\mathbb{B}$. $_ /$

Korollar 1: $\mathcal{M}_0(X, \mathbb{B})$ ist der ordnungstheoretische Dualraum von $\tilde{\mathcal{K}}(X, \mathbb{B})$.

Beweis: Ist $\mathcal{T}_\mu$ $\mathbb{B}$ -pseudokompakt, so auch $\mathcal{T}_{\mu^+}$ und $\mathcal{T}_{\mu^-}$.

Folglich kann n. Theor. 8 jedes $\mu \in \mathcal{M}_0$ zu einer relativ beschränkten Linearform auf $\tilde{\mathcal{K}}_\mathbb{B}$ fortgesetzt werden. Ist umge-

kehrt $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_+ - \tilde{\mu}_-$ eine relativ beschränkte Linearform auf $\tilde{\mathcal{K}}_\mathbb{B}$ und $\mu = \text{Rest}_{\mathcal{K}_\mathbb{B}} \tilde{\mu}$ das zugehörige Maß, so ist

$\mathcal{T}_\mu = \{ Z : Z = Z^+ \cup Z^-, Z^+ \in \mathcal{T}_{\mu^+}, Z^- \in \mathcal{T}_{\mu^-} \}$ $\mathbb{B}$ -pseudokompakt. $_ /$

Korollar 2: $\mathcal{M}_0(X, \mathbb{B}) \subset \mathcal{M}^\mathbb{B}(X, \mathbb{B})$

Beweis: Nach GOULD [15], p. 241, ist jede positive Linearform auf $\tilde{\mathcal{K}}_\mathbb{B}$ $\mathbb{B}$ -stetig. Die Behauptung folgt somit aus Theor. 8 und Satz 1.5. $_ /$

Korollar 3: Die Fortsetzung von $\mu \in \mathcal{M}_0$ auf $\tilde{\mathcal{K}}_\mathbb{B}$ ist eindeutig.

Beweis: Für jedes $f \in \tilde{\mathcal{K}}_\mathbb{B}$ gilt: $\tilde{\mu}(f) = \sup_n \mu(f \wedge n)$. $_ /$

5.4 Charakterisierung der $\mathcal{B}$ -reellkompakten Räume

GO-DIN HU [14] und KNOWLES [20] haben folgende Charakterisierung der reellkompakten Räume oder Q-Räume von HEWITT [18] zu beweisen versucht:

$$(17) \quad X \text{ reellkompakt} \iff \mathcal{M}^{\mathcal{B}}(X) = \mathcal{M}^{\tau}(X) .$$

Aus dieser Aussage, angewandt auf einen diskreten Raum mit der Mächtigkeit des Kontinuums, würde die Nichtmeßbarkeit des Kontinuums folgen. Sowohl der Beweis von GO-DIN HU als auch der von KNOWLES sind jedoch - obwohl auf ganz unterschiedlichen Beweisideen beruhend - falsch. Vermutlich ist die Aussage (17) auch falsch, denn die in (17) verwendeten Maße im Sinne von ALEXANDROFF-VARADARAJAN (siehe Bsp. (ii) in 1.2) sind Elemente des Duals von $\mathcal{C}_b(X)$. Die Eigenschaft der Reellkompaktheit eines Raumes X ist aber eine Struktureigenschaft des Ringes $\mathcal{C}(X)$ (vgl. [12], [18]). Für eine maßtheoretische Charakterisierung der reellkompakten Räume können somit u.E. nur diejenigen Maße auf X in Frage kommen, die auf $\mathcal{C}(X)$ fortsetzbar sind. Diese werden aber gerade durch das Theorem 8 gekennzeichnet.

In der Tat läßt sich mit Hilfe des Theorems 8 eine maßtheoretische Kennzeichnung (Theor. 9 (ii)) der $\mathcal{B}$ -reellkompakten - und damit für beschränkte Räume $(X, \mathcal{B})$ der reellkompakten - Räume geben.

Es sei daran erinnert, daß $\tilde{\mathcal{K}}^0$ den ordnungstheoretischen und $\tilde{\mathcal{K}}'$ den topologischen Dualraum (bzgl. der Topologie der $\mathcal{B}$ -kompakten Konvergenz) von $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}}$ bezeichnet.

Theorem 9: Für jeden lokalbeschränkten Raum $(X, \mathcal{B})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) X ist $\mathcal{B}$ -reellkompakt.
- (ii) $\mathcal{M}_0(X, \mathcal{B}) \subset \mathcal{M}^t(X, \mathcal{B})$.
- (iii) $\tilde{\mathcal{K}}(X, \mathcal{B})^0 = \tilde{\mathcal{K}}(X, \mathcal{B})$.
- (iv) Jede positive Linearform auf $\tilde{\mathcal{K}}(X, \mathcal{B})$ hat einen $\mathcal{B}$ -kompakten Träger.

Beweis: (i) $\rightarrow$ (iv): Sei $\tilde{\mu}$ eine positive Linearform auf $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}}$ und $\mu = \text{Rest}_{\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}}} \tilde{\mu}$ das zugehörige Maß. N. Theor. 8 (iii) gilt dann $T_{\mu'} \subset \cup_{\mathcal{B}} X = X$. Aus Theorem (7) folgt die τ -Stetigkeit von μ und somit n. Satz 1.6 die Existenz von T_{μ} . Aus Kor. 3 zu Satz 5.5 folgt ferner: $T_{\mu} = T_{\mu'} \cap X = T_{\mu'}$. Sei nun A eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $(X, \mathcal{B})$. Dann ist $A \cap T_{\mu}$ eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des lokalbeschränkten Unterraums $(T_{\mu}, \mathcal{B} \cap T_{\mu})$ von $(X, \mathcal{B})$. N. Satz 5.1 ist die Behauptung bewiesen, wenn gezeigt ist: $A \cap T_{\mu}$ kompakt. N. Theor. 7 ist $\bar{A}$ kompakt in $X'_{\mathcal{B}}$. Somit ist die Menge $\bar{A} \cap T_{\mu'}$ kompakt. Wegen $T_{\mu'} \subset X$ folgt aber:

$$\bar{A} \cap T_{\mu'} = (\bar{A} \cap T_{\mu'}) \cap X = A \cap T_{\mu}.$$

(iv) $\rightarrow$ (iii): Eine Linearform $\tilde{\mu}$ auf $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}}$ ist nach 1.4 genau dann stetig bzgl. der Topologie der $\mathcal{B}$ -kompakten Konvergenz, wenn gilt:

$$(18) \forall B \in \mathcal{B} \quad \exists k_B, K \in \mathcal{B} \quad \exists M_B \geq 0 \quad \forall g \in \tilde{\mathcal{K}}(X, \mathcal{B}) : \\ | \tilde{\mu}(g) | \leq M_B \cdot \| g \|_K.$$

Es gilt stets: $\tilde{\mathcal{K}}' \subset \tilde{\mathcal{K}}^0$. Sei nämlich $g \in \tilde{\mathcal{K}}$. Dann gilt für alle $f \in \tilde{\mathcal{K}}$ mit $|f| \leq g$: $T_f \subset T_g \subset B$ für ein $B \in \mathcal{B}$ und somit nach (18): $| \tilde{\mu}(|f|) | \leq M_B \| f \|_K \leq M_B \| g \|_K$. Also ist $\tilde{\mu}$ relativ beschränkt.

Sei nun umgekehrt $\tilde{\mu}$ eine positive Linearform auf $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathbb{B}}$. N. Vor. ist T_{μ} $\mathbb{B}$ -kompakt. Somit ist n. Satz 5.1 die Menge $K_B = B \cap T_{\mu}$ kompakt für jedes $B \in \mathbb{B}$. Nach Axiom (B3) existiert eine positive Funktion h_0 aus $\mathcal{K}_{\mathbb{B}}$ mit $K_B \subset E(h_0)$. Für jedes $h \in \mathcal{K}(X, \mathbb{B})$ gilt somit $|h| \leq \|h\|_{K_B} \cdot h_0$ auf T_{μ} . Daraus folgt aber n. Kor. 1 zu Satz 1.8 und Kor. 3 zu Theor. 8:

$$|\tilde{\mu}(g)| = |\sup_n \mu(g \wedge n)| \leq \sup_n \mu(|g \wedge n|) \leq \mu(h_0) \cdot \|g\|_{K_B} \quad \forall g \in \tilde{\mathcal{K}}(X, \mathbb{B}).$$

Somit ist (18) mit $K = K_B$ und $M_B = \mu(h_0)$ erfüllt.

(iii) $\rightarrow$ (ii): Dies folgt unmittelbar aus der Beziehung

$\mathcal{M}_0(X, \mathbb{B}) = \tilde{\mathcal{K}}(X, \mathbb{B})^0 = \tilde{\mathcal{K}}(X, \mathbb{B})'$ (Kor. 1 zu Theor. 8) und der Definition der Straffheit in 1.4.

(ii) $\rightarrow$ (i): Ang. es existiert ein Punkt $x_0 \in \mathcal{V}_{\mathbb{B}} X \setminus X$. Da X $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathbb{B}}$ -einbettbar ist in $\mathcal{V}_{\mathbb{B}} X$, wird durch

$$\tilde{\mu}(f) := \bar{f}(x_0) \quad (f \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathbb{B}})$$

eine positive Linearform auf $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathbb{B}}$ erklärt. Das Maß $\mu = \text{Rest}_{\mathcal{K}_{\mathbb{B}}} \tilde{\mu}$ gehört somit n. Theor. 8 zu $\mathcal{M}_0(X, \mathbb{B})$. Andererseits gilt für die kompakte Menge $\{x_0\} \subset X'_{\mathbb{B}} \setminus X$ und das zu μ gehörende Borelmaß $\mu' = \delta_{x_0}$ auf $X'_{\mathbb{B}}$: $\mu'(\{x_0\}) = 1$. Somit ist nach Theorem (t) μ nicht straff. $\neg$

Ist speziell $(X, \mathbb{B})$ beschränkt, so ist $\tilde{\mathcal{K}}(X, \mathbb{B})$ der Ring $\mathcal{C}(X)$ aller stetigen reellen Funktionen auf X versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz. Das Theorem 9 nimmt dann folglich die folgende Gestalt an:

Satz 5.6: Für jeden vollständig regulären Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist reellkompakt.

(ii) $\mathcal{M}_0(X) \subset \mathcal{M}^t(X)$.

(iii) $\mathcal{C}(X)^0 = \mathcal{C}(X)'$.

(iv) Jede positive Linearform auf $\mathcal{C}(X)$ ist stetig.

(v) Jede positive Linearform auf $\mathcal{C}(X)$ hat einen kompakten Träger.

Wir bringen nun einige Anwendungen des Satzes 5.6 .

Mit Hilfe des Satzes 5.6 lassen sich verschiedene Ergebnisse aus der Theorie der Radonmaße (z.B. [7], Chap. 4, § 4 No. 8 sowie exerc. 16) für lokalkompakte und reellkompakte Räume verschärfen. Wir bringen als Beispiel:

Satz 5.7: Sei X lokalkompakt und reellkompakt (spez.: σ -kompakt). Dann gilt: Das Radonmaß μ auf X ist genau dann zu einer relativ beschränkten Linearform auf $\mathcal{C}(X)$ fortsetzbar, wenn der Träger von μ kompakt ist.

Nach Satz 5.6 kann diese Aussage nicht für beliebige lokalkompakte Räume richtig sein. In der Tat liefert der Raum Ω aller abzählbaren Ordnungszahlen versehen mit der Ordnungstopologie ein Gegenbeispiel.

Beispiel 4: Sei $\Omega = W(\omega_1)$ der Raum aller Ordnungszahlen, die kleiner sind als die erste nicht abzählbare Ordnungszahl ω_1 ([12], 5.11-13). Versehen mit der Ordnungstopologie ist Ω lokalkompakt und pseudokompakt. Für alle $f \in \mathcal{C}(\Omega) = \mathcal{C}_b(\Omega)$ bezeichne $\bar{f}$ die stetige Fortsetzung von f auf $\beta\Omega = W(\omega_1 + 1)$. Dann ist die positive Linearform

$$\mu(f) := \bar{f}(\omega_1) \quad (f \in \mathcal{C}_b(\Omega))$$

ein Radonmaß auf Ω , das trivialerweise auf $\mathcal{C}(\Omega)$ fortsetzbar ist, aber keinen kompakten Träger hat. Aus Satz 5.6 folgt außerdem: μ ist nicht stetig auf $\mathcal{C}(\Omega)$ und Ω ist nicht reellkompakt.

Das folgende Resultat ist u.W. bisher nur für höchstens abzählbare Mengen X bekannt (siehe [7], chap. 4, exerc. 16).⁺

Satz 5.8: Sei X eine Menge, deren Kardinalzahl nicht stark unerreichbar ist [34]. Dann hat jede positive Linearform L auf $\mathbb{R}^X$ einen endlichen Träger. M.a.W.: L ist von der Gestalt:

$$L(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot f(x_j) \quad (\lambda_j \geq 0, x_j \in X)$$

für alle $f \in \mathbb{R}^X$.

Beweis: Jeder diskrete Raum, dessen Kardinalzahl nicht stark unerreichbar ist, ist nach [12], chapt. 12, reellkompakt. Somit folgt die Behauptung aus Satz 5.6 (v). $\square$

5.5 Folgerungen bzgl. der Existenz meßbarer Kardinalzahlen

Eine Kardinalzahl m nennen wir mit GILMAN-JERISON [12], 12.1 und SOLOVAY [32] meßbar, wenn eine Menge X mit der Mächtigkeit m und ein zweiwertiges Maß μ auf der Potenzmenge von X existiert mit $\mu(X) = 1$ und $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in X$. Die Kardinalzahl m heiße dagegen reell-meßbar, wenn ein reellwertiges m -additives Maß $\mu \neq 0$ auf der Potenzmenge von X existiert mit $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in X$.

Die Frage nach der Existenz solcher Kardinalzahlen ist ein wohlbekanntes ungelöstes Problem. Mit Hilfe des Satzes 5.6 lassen sich nun die nicht-meßbaren Kardinalzahlen wie folgt charakterisieren:

Satz 5.9: Die Kardinalzahl einer Menge X ist genau dann nicht-meßbar, wenn jede positive Linearform auf $\mathbb{R}^X$ einen endlichen Träger hat.

⁺) Inzwischen wurde dieses Resultat auch von CHOQUET gefunden. (Siehe Postskriptum zur Einleitung)

Beweis: Da ein diskreter Raum genau dann reellkompakt ist, wenn seine Kardinalität nicht-meßbar ist [12], 12.2, folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 5.6 (v) . $_ /$

Mit Hilfe eines neueren Resultats von SOLOVAY [32] läßt sich nun folgende Aussage über die Existenz reell-meßbarer Kardinalzahlen machen:

Satz 5.10: Läßt sich unter der Voraussetzung der axiomatischen Mengentheorie von ZERMELO-FRAENKEL (ZF) und der Gültigkeit des Auswahlaxioms (AC) beweisen, daß jede positive Linearform auf $\mathbb{R}^X$ (X beliebige Menge) einen endlichen Träger hat (L), so ist damit auch die Nichtexistenz einer reell-meßbaren Kardinalzahl bewiesen - und umgekehrt.

Beweis: N. Vor. gilt: (ZF) + (AC) impliziert (L). (L) impliziert n. Satz 5.9 die Nichtexistenz einer (zweiwertig) meßbaren Kardinalzahl ($\nexists$ 2MC). Somit ist die Theorie (ZF) + (AC) + ($\exists$ 2MC) inkonsistent. Dann ist nach SOLOVAY [32], Theor. 2, auch die Theorie (ZF) + (AC) + ($\exists$ RMC $\leq 2^{\aleph_0}$) inkonsistent. Insbesondere impliziert also (ZF) + (AC) die Nichtmeßbarkeit des Kontinuums. Dann impliziert nach ULAM [34], Satz 3, (ZF) + (AC) aber auch die Nichtexistenz einer reellmeßbaren Kardinalzahl. Die Umkehrung folgt unmittelbar aus Satz 5.9 . $_ /$

Literaturverzeichnis

- [1] ALEXANDROFF, A.D.: Additive set functions in abstract spaces. Mat. Sbornik n.S. 8, 307-348 (1940); n.S. 9, 563-628 (1941).
- [2] BAUER, H.: Caractérisation topologique de la partie complètement additive et de la partie purement additive d'une fonction additive d'ensemble. C.R. Acad. Sci. Paris 238, 1771-73 (1954).
- [3] ----- : Über die Beziehungen einer abstrakten Theorie des Riemann-Integrals zur Theorie Radonscher Maße. Math. Zeitschr. 65, 448-82 (1956).
- [4] ----- : Sur l'équivalence des théories de l'intégration selon N. Bourbaki et selon M.H.Stone. Bull. Soc. math. France, 85, 51-75 (1957).
- [5] ----- : Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie Bd. I. Berlin 1964.
- [6] BOURBAKI, N.: Topologie Générale Chap. I-X. Actual. Scient. et Ind. 1142, 1143, 1235, 1045, 1084, Paris (jeweils letzte Ausgabe).
- [7] ----- : Intégration Chap. I-IV. Actual. Scient. et Ind. 1175, Paris 1965.
- [8] ----- : Espaces vectoriels topologiques Chap. I-V. Actual. Scient. et Ind. 1189, 1229 Paris 1966/64.
- [9] COURREGE, P.: Théorie de la Mesure. Centre Docum. Univers., Paris 1965.
- [10] DANIELL, P.J.: A general form of integral. Ann. of Math. (2) 29, 279-294 (1918).
- [11] GELFAND, I., u. G. ŠILOV: Über verschiedene Methoden der Einführung der Topologie in die Menge der maximalen Ideale eines normierten Raumes. Rec. math. Moscou n.S. 9, 25-38 (1941).
- [12] GILLMAN, L., and M. JERISON: Rings of continuous functions. Princeton 1960.
- [13] GLICKSBERG, I.: The representation of functionals by integrals. Duke Math. J. 19, 253-61 (1952).
- [14] GO-DIN HU: Measures on $\mathfrak{F}$ -topological and topological spaces. Mat. Sbornik n.S. 60 (102), 257-69 (1963).
- [15] GOULD, G.G.: A Stone-Čech-Alexandroff-Type Compactification and its Application to Measure Theory. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 14, 221-44 (1964).
- [16] HALMOS, P.R.: Measure Theory, Princeton 1950.
- [15a] GOULD G.G., u. M. MAHOWALD: Measures on completely regular spaces. Journ. of Lond. Math. Soc. 37, pp 103 (1962).

- [17] HAUPT, O., u. Chr. PAUC: Bemerkungen über Inhalte und Maße in lokal bikompakten Räumen. Akad. Wiss. Lit. Mainz, Abh. math. nat. Kl. 1955, 189-218 (1956).
- [18] HEWITT, E.: Rings of real-valued continuous functions. Trans. Amer. Math. Soc. 64, 54-99 (1948).
- [19] JACOBS, K.: Maß und Integral. Vorl. Ausarb., Erlangen 1966.
- [20] KNOWLES, J.D.: Measures on topological spaces. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 17, 139-56 (1967).
- [21] KÖLZOW, D.: Charakterisierung der Maße, welche zu einem Integral im Sinne von Stone oder von Bourbaki gehören. Arch. d. Math. 16, 200-7 (1965).
- [22] KÖTHE, G.: Topologische Lineare Räume I. Berlin 1960.
- [23] KRICKEBERG, K.: Strong mixing properties of Markov chains with infinite invariant measure. Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., Berkeley 1967.
- [24] LE CAM, L.: Convergence in distribution of stochastic processes. Univ. Calif. Publ. Stat. 2, 11, 207-36 (1957).
- [25] LOOMIS, L.H.: Linear functionals and content. Amer. Journ. Math. 76, 168-82 (1954).
- [26] MAZUR, S.: Une remarque sur l'homéomorphie des champs fonctionnels. Studia Math. 1, 83-85 (1929).
- [27] NEVEU, J.: Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités. Paris 1964.
- [28] NÖBELING G., u. H. BAUER: Allgemeine Approximationskriterien mit Anwendungen. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 58, 54-72 (1955).
- [29] ----- : Über die Erweiterungen topologischer Räume. Math. Annalen 130, 20-45 (1955).
- [30] ROSS, K.A., and K. STROMBERG: Baire sets and Baire measures. Arkif för Matem. 6, Nr. 8, 151-60 (1965).
- [31] SCHWARTZ, L.: Les Mesures de Radon dans les Espaces Topologiques Arbitraires. Vorl. Ausarb., Paris 1964
- [32] SOLOVAY, R.: Real-valued measurable cardinals. Lect. notes prep. in conn. with the Summer Inst. ax. set theory, UCLA (1967).
- [33] STONE, M.H.: Notes on Integration I-IV. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 34, 336-42, 447-55, 483-90 (1948); 35, 50-58 (1949).

- [34] ULAM, S.: Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre. Fund. Math. 16, 140-50 (1930).
- [35] VARADARAJAN, V.S.: Measures on topological spaces (russ.). Mat. Sbornik n.S. 55 (97), 33-100 (1961); Übers. (engl.): Transl. Amer. Math. Soc. (2) 78, 161-228 (1965).
- [36] YOUNG, W.H.: A new method in the theory of integration. Proc. Lond. Math. Soc. (2) 9, 15-50 (1911).

Lebenslauf

Am 10. Mai 1937 wurde ich in Duisburg als Sohn des Kaufmanns Fritz Sondermann und seiner Ehefrau Elfriede geboren. Nach dem Besuch verschiedener Volksschulen in Drübeck/Harz und in Duisburg wurde ich 1947 Schüler des neusprachlichen Steinbart-Gymnasiums in Duisburg. Diese Schule verließ ich im Frühjahr 1953 und wurde kaufmännischer Lehrling in der Firma Rhennania Allgemeine Speditionen-AG., Duisburg. 1956 bestand ich die Kaufmannsgehilfenprüfung vor der Industrie- und Handelskammer in Duisburg. Die folgenden zwei Jahre arbeitete ich als Expedient in der Binnen- und Seeschifffahrt.

Im Frühjahr 1960 legte ich die Reifeprüfung am Steinbart-Gymnasium in Duisburg ab. Anschließend begann ich das Studium der Mathematik und Betriebswirtschaft in Bonn, das ich nach dem Vordiplom in Hamburg fortsetzte. Von 1964 bis 1966 war ich Mitarbeiter im Institut für Unternehmensforschung der Universität Hamburg. Im Dezember 1966 legte ich die Diplomprüfung für Mathematik in Hamburg ab. Seit Beginn des Jahres 1967 bin ich Doktorand bei Herrn Prof. Dr. Heinz Bauer in Erlangen.

Am 12. März 1967 heiratete ich die Lehrerin Annemarie Boeters.

Dieter Sondermann

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 852 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 2 29 90
